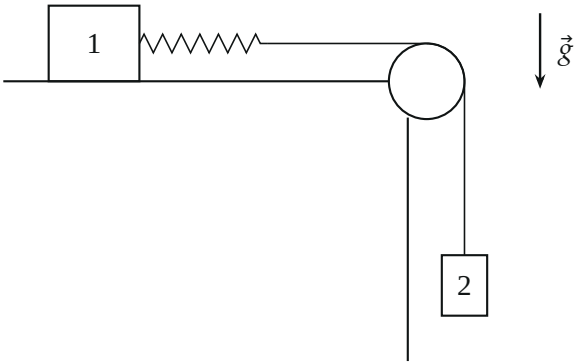
Груз на пружине и нити через трубу

Задача 1. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 1] На краю горизонтального стола закреплена труба, через которую переброшена длинная нерастяжимая нить. Горизонтальный конец нити привязан к невесомой пружине, прикреплённой к грузу 1. На вертикальном конце нити подвешен груз 2. В начальном положении груз 1 удерживают, груз 2 неподвижен, удлинение пружины равно x_1. Груз 1 отпускают без толчка. Найдите минимальное значение x_2 удлинения пружины при дальнейшем движении грузов. Известно отношение масс грузов $\beta = m_1/m_2 = 7/4$. Ответ выразите в виде отношения x_2/x_1 и округлите до сотых. Массу нити, массу пружины и трение не учитывайте.



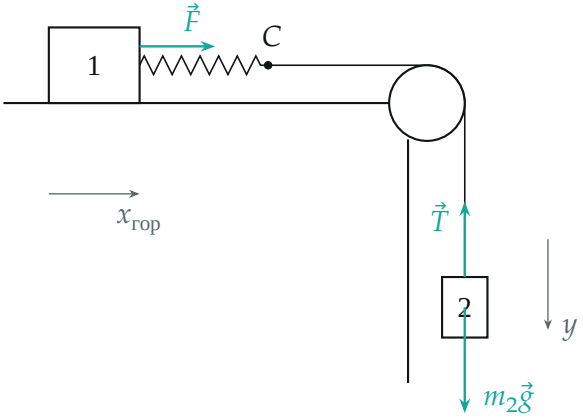
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на колебания системы связанных тел. Пока груз 1 держат, всё неподвижно и пружина растянута весом груза 2: $kx_1 = m_2 g$. Груз 1 отпускают — пружина тянет его вправо, а груз 2 начинает опускаться. Нить остаётся натянутой, поэтому сила натяжения нити всё время равна силе упругости пружины. Удлинение пружины зависит только от *разности* перемещений груза 1 и груза 2 — для этой разности получается уравнение гармонических колебаний. Минимальное удлинение — противоположная крайняя точка колебаний.

Обозначения. k — жёсткость пружины; x — удлинение пружины в момент t; X_1 — смещение груза 1 вправо; Y_2 — смещение груза 2 вниз; C — точка крепления нити к пружине; $F = kx$ — сила упругости, T —

сила натяжения нити. Ось $x_{\text{гор}}$ для груза 1 — вправо, ось y для груза 2 — вниз (рисунок 2).

1. Начальное положение. Груз 2 покоится: по первому закону Ньютона $T = m_2 g$. Нить и пружина невесомы, поэтому сила натяжения передаётся без изменения на пружину: $kx_1 = T = m_2 g$, то есть

$$x_1 = \frac{m_2 g}{k}.$$



Горизонтальные силы на груз 1 и силы на груз 2. Вертикальные силы, действующие на груз 1 (тяжесть и реакция стола), компенсируют друг друга и не показаны.

2. Второй закон Ньютона для каждого груза. Для груза 1 в проекции на ось $x_{\text{гор}}$ и для груза 2 в проекции на ось y (рисунок 2):

$$m_1 \ddot{X}_1 = F = kx, \qquad m_2 \ddot{Y}_2 = m_2 g - T = m_2 g - kx.$$

Здесь мы сразу заменили T на kx: невесомая нить, перекинутая через трубу без трения, передаёт силу без изменения, а невесомая пружина тянет нить с той же силой, что и груз 1.

3. Удлинение пружины. Нить нерастяжима: точка C смещается вправо ровно настолько, насколько опускается груз 2, то есть на Y_2. Груз 1

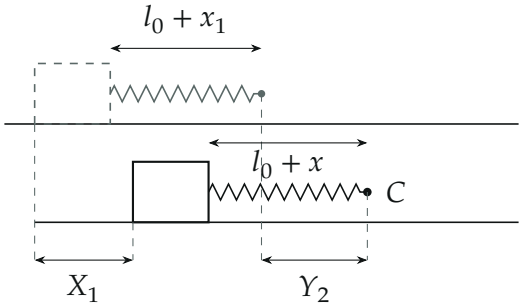
смещается вправо на X_1. Пружина между ними удлиняется на разность (рисунок 3):

$$x = x_1 + Y_2 - X_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{Y}_2 - \ddot{X}_1.$$

Подставим ускорения из шага 2:

$$\ddot{x} = g - \frac{kx}{m_2} - \frac{kx}{m_1} = g - \frac{k}{\mu}x, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Это уравнение колебаний одного груза массой μ (приведённой массы) на пружине жёсткости k в поле тяжести: $\mu\ddot{x} = \mu g - kx$.



Сверху (серым) — начальное положение, снизу — положение через время t. Груз 1 сместился на X_1, точка C — на Y_2 (столько же опустился груз 2); удлинение $x = x_1 + Y_2 - X_1$.

4. Положение равновесия и амплитуда. В положении равновесия $\ddot{x} = 0$:

$$x_\text{р} = \frac{\mu g}{k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 = \frac{\beta}{\beta + 1} x_1.$$

В начальный момент удлинение x_1, а скорость его изменения $\dot{x} = \dot{Y}_2 - \dot{X}_1 = 0$ (оба груза покоятся). Значит, x_1 — крайняя точка колебаний, амплитуда

$$A = x_1 - x_\text{р} = \frac{1}{\beta + 1} x_1.$$

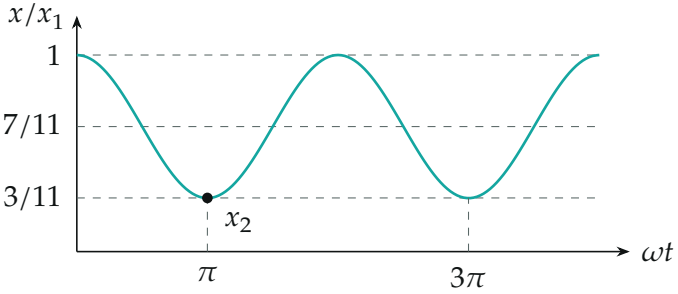
Колебания гармонические, симметричные относительно $x_\text{р}$: вторая крайняя точка — наименьшее удлинение (рисунок 4):

$$x_2 = x_\text{р} - A = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}\, x_1.$$

5. Число. При $\beta = 7/4$:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{7/4 - 1}{7/4 + 1} = \frac{3}{11} \approx 0{,}27.$$

Так как $x_2 > 0$, пружина всё время растянута и нить натянута — уравнение шага 2 верно на всём движении.



Удлинение пружины $x/x_1 = \frac{7}{11} + \frac{4}{11}\cos\omega t$, $\omega = \sqrt{k/\mu}$: *колебания между* x_1 *и* $x_2 = \frac{3}{11}x_1$ *около* $x_p = \frac{7}{11}x_1$.

6. Второй способ — энергия в «приведённой» задаче. Для груза массой μ на пружине в поле тяжести крайние точки — там, где кинетическая энергия равна нулю. Работа «силы тяжести» μg и пружины между крайними точками в сумме равна нулю:

$$\mu g\,(x_1 - x_2) = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 + x_2 = \frac{2\mu g}{k} = 2x_\text{р}.$$

Тогда $x_2 = 2x_\text{р} - x_1 = (\frac{14}{11} - 1)x_1 = \frac{3}{11}x_1$ — то же.

Обратите внимание. Положение равновесия колебаний — не x_1: пока груз 1 держали, пружина растягивалась весом $m_2 g$, а при свободном

грузе 1 «эффективный вес» меньше — μg, потому что груз 1 сам уезжает вправо и разгружает пружину.

Ответ:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{3}{11} \approx 0{,}27.$$

Проверка. Отношение безразмерно. Предел $m_1 \to \infty$ ($\beta \to \infty$): груз 1 не сдвигается, удлинение остаётся x_1, и формула даёт $x_2/x_1 \to 1$. При $m_1 = m_2$ получаем $x_2 = 0$ — пружина в крайней точке ровно недеформирована; при $m_1 < m_2$ формула дала бы $x_2 < 0$, то есть нить провисла бы — у нас $\beta > 1$, такого нет.

Ответ. $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\beta - 1}{\beta + 1} = \dfrac{3}{11} \approx 0{,}27.$