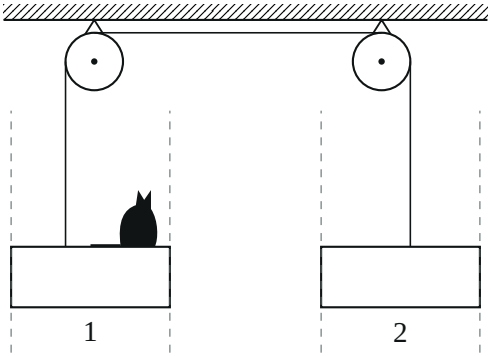
Кот Фотон прыгает между платформами

Задача 2. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 2] Кот Фотон прыгает с одной платформы на другую, которые соединены между собой натянутой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальные блоки. Платформы могут скользить без трения вдоль вертикальных направляющих. Масса каждой платформы M. Известно, что Фотон умеет перепрыгивать пятикратное расстояние между платформами, прыгая с твёрдой горизонтальной поверхности земли. Какую максимальную массу может иметь Фотон, чтобы допрыгнуть до второй платформы? Под каким углом к горизонту в этом случае ему надо прыгнуть? Перед прыжком платформы покоятся и удерживаются на одном уровне. Смещением платформы в процессе отталкивания пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения импульса при толчке и бросок в движущейся системе отсчёта. Отталкиваясь, кот давит на платформу 1 вниз — она поехала вниз, а через нить и блоки потянула платформу 2 вверх. После толчка платформы одинаковой массы уравновешены (у каждой сила тяжести Mg и натяжение нити $T = Mg$) и едут с постоянными скоростями — это инерциальные системы отсчёта. Кот умеет прыгать с определённой скоростью *относительно опоры*, то есть относительно платформы 1. А долететь он должен до платформы 2, которая едет ему навстречу вверх — относительно неё дальность полёта меньше. Чем тяжелее кот, тем быстрее разъезжаются платформы и тем меньше дальность.

Обозначения. m — масса кота; L — расстояние между платформами; v_0 — скорость прыжка относительно опоры (с земли кот прыгает на $5L$); θ — угол прыжка к горизонту относительно платформы 1; $\vec{w}$ — скорость кота относительно земли сразу после толчка; V — скорость платформ после толчка (платформа 1 — вниз, 2 — вверх); J — импульс силы, с которой кот толкает платформу 1; P_T — импульс силы натяжения нити. Ось x — горизонтально к платформе 2, ось y — вверх.

1. Умение кота. С неподвижной земли максимальная дальность при скорости v_0 — при угле 45°:

$$\frac{v_0^2}{g} = 5L.$$

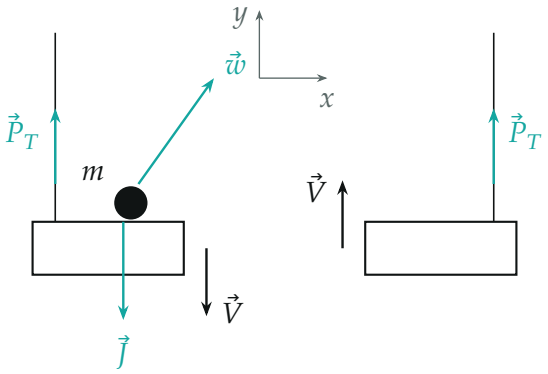
Скорость v_0 — то, что кот «умеет» относительно опоры, от которой отталкивается; с платформы 1 он прыгает с той же скоростью v_0 относительно неё.

2. Толчок: теорема об изменении импульса для каждого тела. Толчок короткий: силы тяжести за это время дают малый импульс, смещением платформ пренебрегаем. В проекции на ось y (рисунок 2):

$$\begin{aligned} \text{кот:} \quad & mw_y = J, \\ \text{платформа 1:} \quad & -MV = -J + P_T, \\ \text{платформа 2:} \quad & MV = P_T. \end{aligned}$$

Нить невесома и нерастяжима, блоки идеальны — импульс натяжения одинаков для обеих платформ, а скорости равны по модулю. Складываем второе и третье уравнения: $J = 2MV$, тогда

$$V = \frac{m}{2M}\, w_y = \lambda\, w_y, \qquad \lambda = \frac{m}{2M}.$$



Толчок. Бирюзовым — импульсы сил: $\vec{J}$ от кота на платформу 1, $\vec{P}_T$ нити на каждую платформу. Чёрным — скорости платформ сразу после толчка.

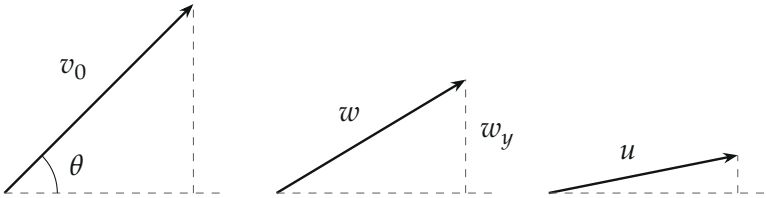
3. Связь скоростей: закон сложения скоростей. Скорость кота относительно платформы 1 — это $\vec{w}$ минус скорость платформы 1 (вниз, $-V$):

$$v_0 \cos\theta = w_x, \qquad v_0 \sin\theta = w_y + V = (1+\lambda)\, w_y.$$

Скорость кота относительно платформы 2 (она едет вверх со скоростью V):

$$u_x = w_x = v_0 \cos\theta, \qquad u_y = w_y - V = (1-\lambda)\, w_y = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, v_0 \sin\theta.$$

Горизонтальная составляющая во всех трёх системах одна, вертикальная — разная (рисунок 3).



отн. платформы 1 отн. земли отн. платформы 2

Скорость кота сразу после толчка в трёх системах отсчёта при $\lambda = 2/3$, $\theta = 45°$: вертикальные составляющие относятся как $(1+\lambda) : 1 : (1-\lambda) = 5 : 3 : 1$, горизонтальная одна и та же.

4. Условие «долетел». В системе платформы 2 (инерциальной) кот летит как камень, брошенный с её уровня со скоростью $\vec{u}$: в момент толчка платформы на одном уровне, и смещением при толчке пренебрегаем. Дальность полёта до возвращения на уровень платформы 2 должна быть не меньше L:

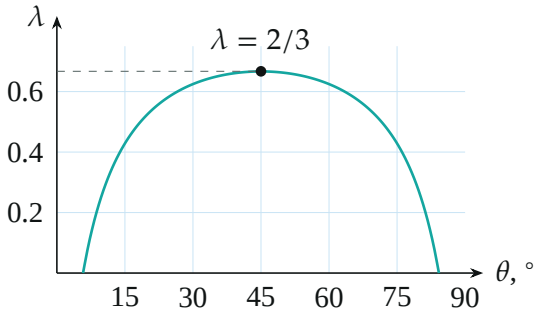
$$\frac{2u_x u_y}{g} \geq L \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq L.$$

С $v_0^2/g = 5L$ из шага 1:

$$5\sin 2\theta \cdot \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq \frac{5\sin 2\theta - 1}{5\sin 2\theta + 1}.$$

5. Наибольшая масса. Правая часть растёт вместе с $\sin 2\theta$, наибольшая она при $\sin 2\theta = 1$, то есть при $\theta = 45°$ относительно платформы 1 (рисунок 4):

$$\lambda_{\max} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad m_{\max} = 2M\lambda_{\max} = \frac{4}{3}M.$$



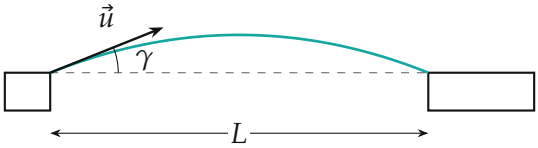
Наибольшее $\lambda = m/(2M)$, при котором кот ещё долетает, в зависимости от угла прыжка θ относительно платформы 1 (посчитано по формуле шага 4).

6. Угол к горизонту. Угол 45° — относительно платформы, от кото-

рой кот отталкивается. Для наблюдателя на земле при $\lambda = 2/3$ (шаг 3):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_y}{w_x} = \frac{\sin\theta}{(1+\lambda)\cos\theta} = \frac{1}{1+2/3} = \frac{3}{5}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \approx 31^\circ.$$

Относительно платформы 2 угол ещё меньше: $\operatorname{tg} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{5}$, около 11° (рисунок 5).



Полёт кота в системе отсчёта платформы 2: бросок под углом γ, $\operatorname{tg}\gamma = 1/5$, дальность ровно L (кривая — парабола по вычисленным точкам, вертикаль растянута вдвое для наглядности).

Обратите внимание. Сила натяжения нити во время толчка велика и даёт заметный импульс P_T: импульс системы «кот + две платформы» по вертикали *не* сохраняется — блоки, закреплённые на потолке, внешние. Поэтому законы записаны для каждого тела отдельно.

Ответ: $m_{\max} = \frac{4}{3}M$; прыгать под углом 45° к платформе, с которой кот отталкивается, — для наблюдателя на земле это угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \approx 31^\circ$ к горизонту.

Проверка. Размерность: λ безразмерно. Предел $M \to \infty$ ($\lambda \to 0$): платформы не сдвигаются, условие шага 4 даёт $5\sin 2\theta \geq 1$ — кот с запасом долетает, как с земли. Если бы кот прыгал со «способностью» L ($v_0^2/g = L$), то $\lambda_{\max} = 0$ — допрыгнуть смог бы только невесомый кот: всё правильно, любой отток скорости на платформы уменьшает дальность.

Ответ. $m_{\max} = \frac{4}{3}M$; угол прыжка 45° относительно платформы, то есть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \approx 31^\circ$ к горизонту относительно земли.