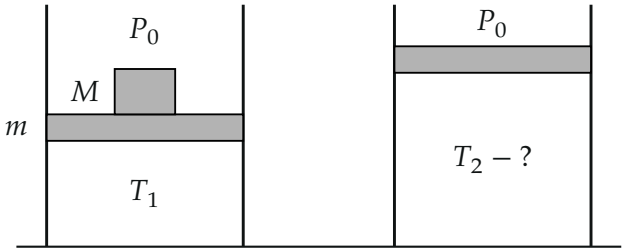
Гелий и поршень после снятия груза

Задача 3. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 3] Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 1$ кг, на котором стоит груз массой $M = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. В начальном состоянии давление гелия уравновешивает внешнее давление. Груз убирают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для необратимого процесса. Груз сняли — поршень оказался легче, чем нужно для равновесия, и рванул вверх; он разгоняется, проскакивает новое положение равновесия, колеблется, и колебания затухают (трения о стенки нет, но в газе есть вязкость). Теплообмена нет, однако процесс не квазистатический, поэтому уравнение адиабаты неприменимо. Работает закон сохранения энергии: в начале и в конце поршень покоится, а внешняя сила, действующая на систему «гелий + поршень», постоянна.

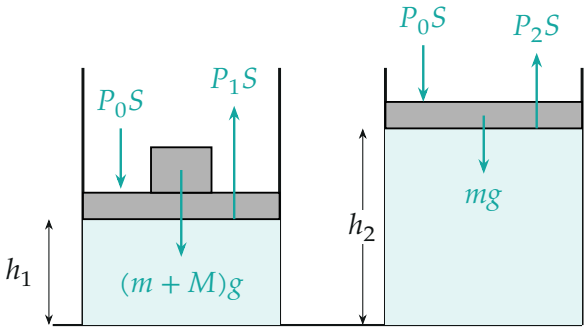
Обозначения. ν — количество гелия; P_1, P_2 — начальное и конечное давления гелия; h_1, h_2 — начальная и конечная высоты поршня над

дном; A — работа гелия над поршнем; A_0 — работа силы давления воздуха P_0S. Ось y — вертикально вверх.

1. Равновесие поршня в начале и в конце. Первый закон Ньютона для поршня (с грузом в начале, без груза в конце) в проекции на ось y (рисунок 2):

$$P_1S = P_0S + (m+M)g, \qquad P_2S = P_0S + mg.$$

Числа: $P_0S = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10$ Н, $mg = 10$ Н, $Mg = 20$ Н, поэтому $P_1S = 40$ Н, $P_2S = 20$ Н — давление падает вдвое.



Силы на поршень (с грузом) в начале и на поршень без груза в конце; оба состояния — равновесные.

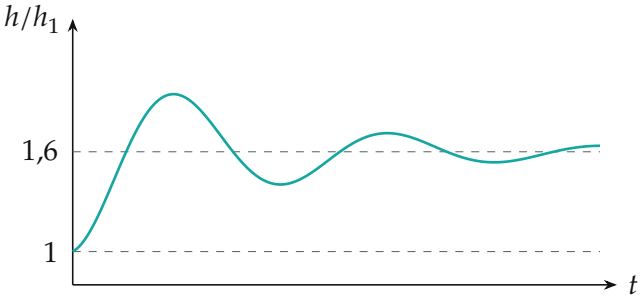
2. Работа гелия: закон изменения кинетической энергии поршня. Поршень поднялся с h_1 на h_2 и в начале и в конце покоится. Сумма работ всех сил на поршень равна нулю:

$$A + A_0 - mg\,(h_2 - h_1) = 0, \qquad A_0 = -P_0S\,(h_2 - h_1)$$

(воздух давит вниз, поршень идёт вверх — работа воздуха отрицательна). Отсюда

$$A = (P_0S + mg)(h_2 - h_1) = P_2S\,(h_2 - h_1).$$

Хотя давление гелия во время колебаний сложным образом меняется, его полная работа выражается через *постоянную* силу P_2S — вот зачем рассматривать поршень.



Качественно: после снятия груза поршень проскакивает новое положение равновесия $h_2 = 1{,}6\,h_1$, колебания затухают. Работа гелия за всё время — $P_2S(h_2 - h_1)$.

3. Первый закон термодинамики для гелия. Теплообмена нет, $Q = 0$:

$$0 = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + P_2S\,(h_2 - h_1).$$

4. Уравнение состояния. Уравнение Менделеева — Клапейрона в начале и в конце:

$$P_1Sh_1 = \nu RT_1, \qquad P_2Sh_2 = \nu RT_2.$$

Значит, $P_2Sh_2 = \nu RT_2$ и $P_2Sh_1 = \dfrac{P_2}{P_1}\,\nu RT_1$. Подставим в шаг 3:

$$\frac{3}{2}(T_2 - T_1) + T_2 - \frac{P_2}{P_1}T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2}{5}\Big(\frac{3}{2} + \frac{P_2}{P_1}\Big)T_1.$$

С $P_2/P_1 = 20/40 = 1/2$:

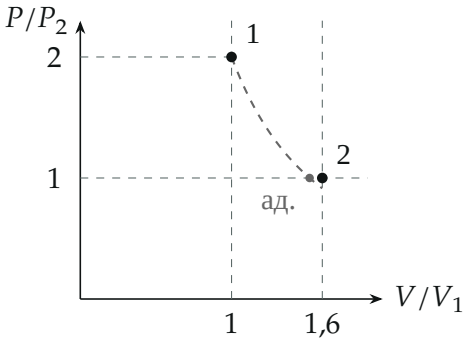
$$T_2 = \frac{2}{5}\cdot 2\cdot T_1 = \frac{4}{5}\cdot 300 = 240\ \text{K}.$$

Тот же результат в общем виде:

$$T_2 = T_1\Big(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{Mg}{P_0S + (m+M)g}\Big).$$

5. Как идёт процесс. Поршень поднимается на $h_2/h_1 = (T_2/T_1)(P_1/P_2) =$

$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$ начальной высоты. На рисунке 4 точки 1 и 2 на диаграмме P–V: промежуточные состояния неравновесные, и линии процесса нет; для сравнения пунктиром показана адиабата, по которой газ пошёл бы, если опускать давление медленно.



Начальное (1) и конечное (2) состояния гелия. Пунктир — обратимая адиабата: она привела бы к меньшему объёму $1{,}52\,V_1$ *и температуре* 227 K.

6. Второй способ — энергия системы «гелий + поршень». Внешние силы для этой системы — тяжесть поршня и давление воздуха, обе постоянны; это то же, что поршень весом P_2S без воздуха. Потенциальная энергия «эффективного груза» $P_2S\,h$ плюс внутренняя энергия гелия сохраняется:

$$\frac{3}{2}\nu RT_2 + P_2Sh_2 = \frac{3}{2}\nu RT_1 + P_2Sh_1,$$

$$\frac{5}{2}T_2 = \frac{3}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_1 = 2T_1,$$

и снова $T_2 = 240$ K.

Обратите внимание. Уравнение адиабаты $PV^{5/3} = \text{const}$ здесь давать нельзя: оно верно только для медленного (квазистатического) процесса. При резком сбросе груза часть работы уходит на колебания поршня и затем рассеивается в самом гелии, поэтому необратимый процесс даёт *большую* температуру: $240\text{ K} > 227\text{ K}$.

Ответ:

$$T_2 = T_1\Big(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{Mg}{P_0S + (m+M)g}\Big) = 240\text{ K}.$$

Проверка. Размерность: дробь безразмерна. Предел $M \to 0$: груза нет — ничего не происходит, $T_2 = T_1$. Знак: газ расширяется без подвода тепла и совершает работу — охлаждается, $T_2 < T_1$. Сравнение с адиабатой ($T_{\text{ад}} = 300 \cdot 2^{-2/5} \approx 227$ К) — необратимый процесс теплее, как и должно быть.

Ответ. $T_2 = T_1\left(1 - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{Mg}{P_0 S + (m+M)g}\right) = 240$ К.