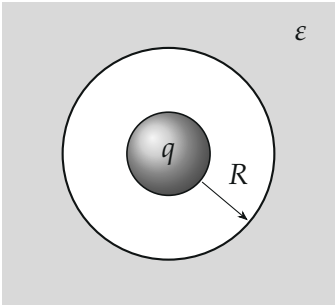
Электрическое давление в полости диэлектрика

Задача 4. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 4] Твёрдый однородный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 3$ заполняет всё пространство за исключением сферической полости радиуса $R = 5$ см. В полости находится металлический шар, несущий заряд $q = 10$ нКл. Радиус шара меньше радиуса полости, центры шара и полости совпадают. Найдите электрическое давление P на поверхность полости (силу, действующую на единицу площади поверхности со стороны электрического поля). Ответ выразите в миллипаскалях и округлите до десятых. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Поясняющий рисунок: металлический шар с зарядом q в сферической полости радиуса R в диэлектрике.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на силы, действующие на диэлектрик в электрическом поле. Поле шара поляризует диэлектрик, и на поверхности полости появляется связанный заряд противоположного знака. Поле притягивает этот заряд к шару: диэлектрик тянется внутрь полости. Прямо сосчитать силу на связанный заряд неудобно (поле на поверхности рвётся скачком), поэтому используем закон сохранения энергии: мысленно чуть раздвинем полость, работа внешних сил на это равна приращению энергии поля.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; ρ — радиус шара; Q — связанный (поляризационный) заряд на поверхности полости; $E(r)$ — напряжённость поля

на расстоянии r от центра; W — энергия поля; φ — потенциал шара (на бесконечности нуль).

1. Поле. По симметрии поле радиальное. В полости ($\rho < r < R$) его создают заряд q шара и связанный заряд Q на сфере R — последний внутри себя поля не даёт:

$$E = \frac{kq}{r^2} \quad (\rho < r < R).$$

В диэлектрике поле ослаблено в ε раз:

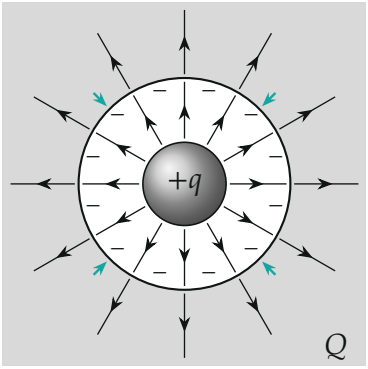
$$E = \frac{kq}{\varepsilon r^2} \quad (r > R).$$

На границе E скачком падает в $\varepsilon = 3$ раза (рисунок 3).

2. Связанный заряд. Снаружи сферы R поле такое, будто в центре сидит заряд $q + Q$:

$$\frac{k(q+Q)}{r^2} = \frac{kq}{\varepsilon r^2} \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$$

При $\varepsilon = 3$ заряд $Q = -\frac{2}{3}q$: он отрицательный, шар положительный, они притягиваются (рисунок 2).



Поле радиальное; в диэлектрике оно в ε раз слабее, чем у самой полости. На поверхности полости — связанный заряд $Q < 0$; бирюзовые стрелки — сила поля на поверхность, внутрь полости.

3. Энергия поля. Систему «шар — диэлектрик» можно считать сферическим конденсатором со второй обкладкой на бесконечности; энергия $W = \dfrac{q\varphi}{2}$. Потенциал шара — сумма потенциалов заряда q (на своей поверхности) и заряда Q (внутри сферы R он постоянен и равен kQ/R):

$$\varphi = \frac{kq}{\rho} + \frac{kQ}{R} = kq\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon R}\Big), \qquad W = \frac{kq^2}{2}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon R}\Big).$$

4. Мысленное расширение полости: закон сохранения энергии. Раздвинем полость с R до $R+\Delta R$ (рисунок 4), удерживая заряд q постоянным. Поле тянет поверхность внутрь с давлением P, поэтому внешние силы должны совершить работу

$$A = P\,\Delta V = P \cdot 4\pi R^2\,\Delta R,$$

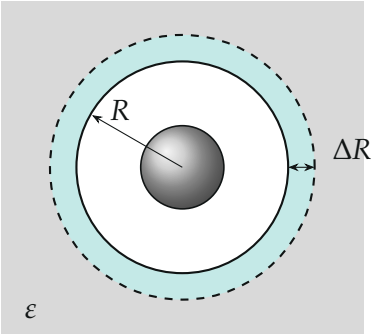
и эта работа идёт на приращение энергии поля:

$$\Delta W = W(R+\Delta R) - W(R) = \frac{kq^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}\Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\Delta R}\Big) \approx \frac{kq^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon R^2}\,\Delta R.$$

$\Delta W > 0$: энергия растёт при расширении — значит, поле действительно стремится полость сжать. Приравниваем $A = \Delta W$:

$$P = \frac{kq^2(\varepsilon - 1)}{8\pi\varepsilon R^4} = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

Радиус шара ρ выпал.

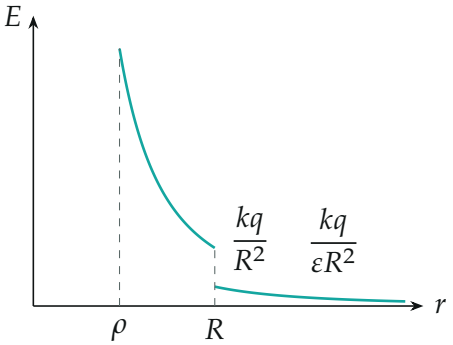


Мысленный опыт: полость раздвинули на ΔR, из бирюзового слоя объёмом $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ убран диэлектрик. Поле изменилось только в этом слое.

5. Второй способ — через плотность энергии. Поле вне слоя ΔV не изменилось (шаг 1: E зависит только от того, полость или диэлектрик в точке). В слое была энергия с плотностью $u_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E_д^2}{2}$, $E_д = \dfrac{kq}{\varepsilon R^2}$, стала — $u_2 = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, $E = \dfrac{kq}{R^2}$:

$$P = u_2 - u_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{kq}{R^2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon R^4}$$

— то же.



Напряжённость поля в зависимости от расстояния до центра ($\varepsilon = 3$): на поверхности полости она скачком падает втрое.

6. Число.

$$P = \frac{(10^{-8})^2 \cdot 2}{32\pi^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot (0{,}05)^4} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{Па} = 3{,}8\ \text{мПа}.$$

Обратите внимание. Ответ можно записать как $P = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, где E — поле в полости у её поверхности: давление — это «разность плотностей энергии» по две стороны границы. Сила направлена внутрь полости: диэлектрик втягивается в область сильного поля.

Ответ:

$$P = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4} \approx 3{,}8 \text{ мПа}$$

(поле тянет поверхность полости к центру).

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Кл}^2}{(\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2))\cdot\text{м}^4} = \text{Н/м}^2$ — паскаль. Предел $\varepsilon \to 1$ (вакуум вокруг): $P \to 0$ — поляризоваться нечему, силы нет. Предел $\varepsilon \to \infty$ (как металл): $P \to \varepsilon_0 E^2/2$ — известное давление поля на поверхность проводника.

Ответ. $P = \dfrac{q^2(\varepsilon - 1)}{32\pi^2\varepsilon_0\,\varepsilon R^4} \approx 3{,}8$ мПа.