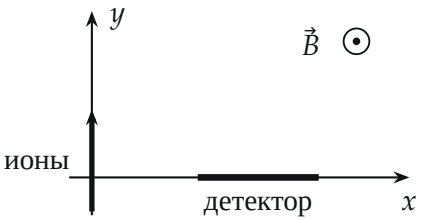
Масс-спектрометр и изотоп

Задача 5. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 5] Методом масс-спектрометрии в лаборатории был проведён эксперимент по исследованию некоторого вещества. Измеренная молярная масса вещества составила $\mu_1 = 86{,}1$ г/моль. Вещество было ионизировано (каждый атом потерял один электрон), затем ускорено в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 4$ кВ и направлено в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}89$ Тл. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости движения ионов и действует в области $y > 0$. Начальная скорость ионов направлена по оси y. Вещество попало под действие магнитного поля в начале координат. Было замечено, что небольшое количество вещества попало на детектор на расстояние $d = 0{,}1$ см дальше по оси x, относительно попадания остального количества вещества. Исходя из этого, было сделано предположение, что некоторое количество атомов-изотопов в исследуемом веществе имеет другую молярную массу. Найдите молярную массу μ_2 этого изотопа. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, а заряд электрона равен $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

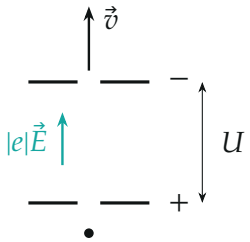


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях. Электрическое поле разгоняет каждый ион до энергии $|e|U$ — одинаковой для всех ионов, но скорость у тяжёлых меньше. В магнитном поле сила Лоренца перпендикулярна скорости, ион идёт по окружности и через полоборота возвращается на ось x на расстоянии диаметра от начала координат. Радиус окружности $R = mv/(|e|B) = \sqrt{2mU/|e|}/B$ растёт с массой, поэтому дальше попадают тяжёлые ионы: изотоп тяжелее основного вещества.

Обозначения. m_1, m_2 — массы ионов основного вещества и изотопа ($m = \mu/N_A$; массой потерянного электрона пренебрегаем); v_1, v_2 — их скорости после ускорения; R_1, R_2 — радиусы траекторий в магнитном поле.

1. Разгон: закон сохранения энергии. Ион с зарядом $|e|$ проходит разность потенциалов U (рисунок 2), работа поля идёт на кинетическую энергию:

$$\frac{mv^2}{2} = |e|U \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2|e|U}{m}}.$$

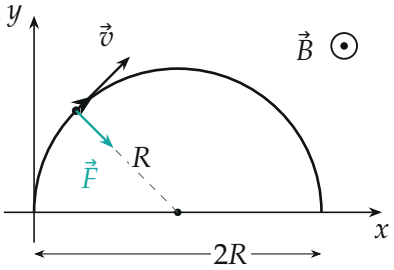


Ускорение положительного иона между сетками с разностью потенциалов U: сила $|e|\vec{E}$ направлена вдоль оси y.

2. Движение в магнитном поле: второй закон Ньютона. Сила Лоренца $\vec{F} = |e|\,\vec{v}\times\vec{B}$ перпендикулярна скорости, модуль скорости не меняется, $F = |e|vB$ сообщает центростремительное ускорение. При $\vec{v}$ вдоль y и $\vec{B}$ на нас сила направлена вдоль $+x$ (рисунок 3) — ион заворачивает вправо, к детектору:

$$\frac{mv^2}{R} = |e|vB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{|e|B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}}.$$

Полуокружность заканчивается на оси x в точке $x = 2R$.



Траектория иона — полуокружность радиуса R; сила Лоренца $\vec{F}$ направлена к центру, скорость — по касательной.

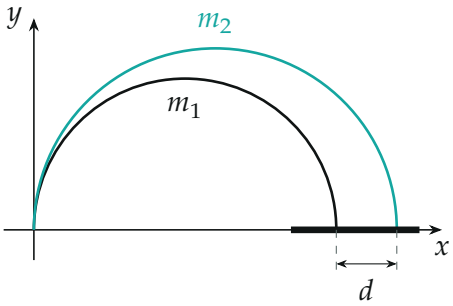
3. Расстояние между пятнами. Тяжёлый изотоп попадает дальше на d (рисунок 4):

$$2R_2 - 2R_1 = d \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{|e|}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right) = d.$$

Отсюда

$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{|e|}{2U}},$$

$$\mu_2 = N_A m_2 = N_A\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{|e|}{2U}}\right)^2.$$



Траектории основного иона (m_1) и изотопа (m_2). Разница диаметров d сильно преувеличена: в опыте $2R_1 \approx 19{,}0$ см, $d = 0{,}1$ см.

4. Числа. Масса основного иона $m_1 = 0{,}0861/(6{,}022\cdot 10^{23}) \approx 1{,}430\cdot 10^{-25}$ кг, $\sqrt{m_1} \approx 3{,}781\cdot 10^{-13}$ кг$^{1/2}$. Добавка

$$\frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{|e|}{2U}} = \frac{0{,}89\cdot 10^{-3}}{2}\sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{8000}} \approx 1{,}99\cdot 10^{-15}\ \text{кг}^{1/2}$$

— в 190 раз меньше $\sqrt{m_1}$. Тогда

$$m_2 \approx (3{,}781 + 0{,}0199)^2\cdot 10^{-26} \approx 1{,}445\cdot 10^{-25}\ \text{кг},$$

$$\mu_2 = N_A m_2 \approx 87{,}0\ \text{г/моль}.$$

Для контроля: $v_1 \approx 9{,}5\cdot 10^4$ м/с, $R_1 = m_1 v_1/(|e|B) \approx 9{,}5$ см.

Обратите внимание. Расстояние между пятнами — разность *диаметров*, а не радиусов: обе траектории начинаются в одной точке, и пятна смещаются на $2\Delta R$.

Ответ:

$$\mu_2 = N_A\Big(\sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{|e|}{2U}}\Big)^2 \approx 87\ \text{г/моль}.$$

Проверка. Размерность: $Bd\sqrt{|e|/U}$ — Тл · м · $\sqrt{\text{Кл/В}}$; так как Тл = В · с/м^2, получаем $\sqrt{\text{В}\cdot\text{Кл}\cdot\text{с}^2/\text{м}^2} = \sqrt{\text{кг}}$ — верно. Второй способ: малые изменения, $R \propto \sqrt{m}$, $\dfrac{\Delta m}{m} = 2\dfrac{\Delta R}{R} = 2\cdot\dfrac{0{,}05}{9{,}5} \approx 0{,}0105$, $\Delta\mu \approx 0{,}0105\cdot 86{,}1 \approx 0{,}9$ г/моль, $\mu_2 \approx 87{,}0$ г/моль — то же.

Ответ. $\mu_2 = N_A\Big(\sqrt{\dfrac{\mu_1}{N_A}} + \dfrac{Bd}{2}\sqrt{\dfrac{|e|}{2U}}\Big)^2 \approx 87$ г/моль.