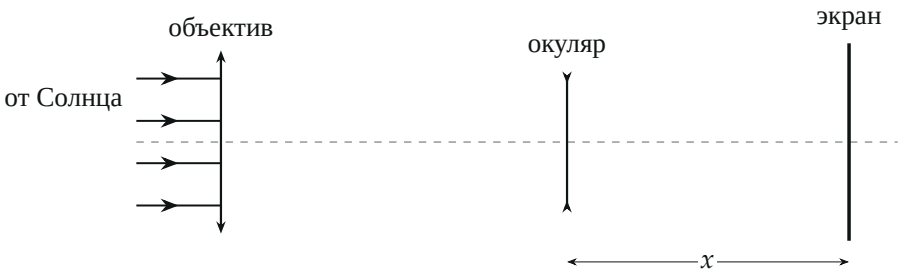
Галилеев телескоп и изображение Солнца

Задача 6. [Курчатов 2020/21, 11 класс, задача 6] Телескоп, собранный по схеме Галилея, состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 2$ м, и окуляра — рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 4$ см. Главные оптические оси линз совпадают. За окуляром, перпендикулярно главной оптической оси линз, расположен экран, на котором получено изображение Солнца в виде круга диаметром $d = 20$ см. Найдите расстояние x между экраном и окуляром. Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0{,}5°$ (угловой диаметр — угол, под которым наблюдатель видит диаметр солнечного диска). Числовой ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Поясняющий рисунок (не в масштабе): объектив, окуляр и экран на общей оси.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в системе двух линз. В обычном галилеевом телескопе окуляр стоит так, что из него выходит параллельный пучок, — на экране изображения нет. Чтобы получить на экране действительное изображение, окуляр придвигают к объективу: на рассеивающую линзу падает сходящийся пучок, который собирался бы в фокальной плоскости объектива, и если он сходится «достаточно сильно», после окуляра он остаётся сходящимся. Изображение, которое дал бы объектив, служит для окуляра мнимым предметом. Размер этого промежуточного изображения дан угловым размером Солнца, увеличение окуляра — отношение расстояний.

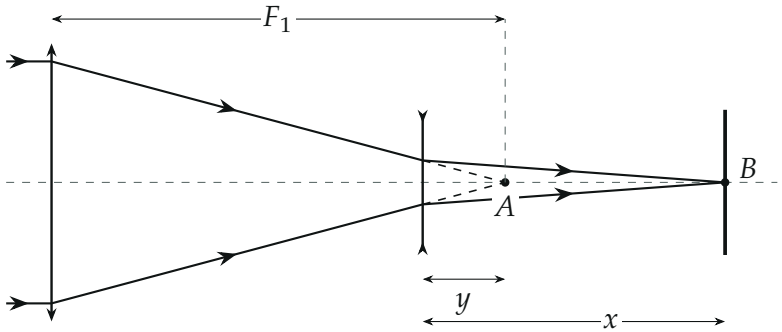
Обозначения. A — главный фокус объектива (там объектив собрал бы лучи от центра Солнца); B — изображение центра Солнца на экране;

y — расстояние от окуляра до A; O — оптический центр окуляра; C, D — изображения краёв Солнца, которые дал бы объектив; $d_0 = CD$; M, N — изображения краёв на экране.

1. Где изображение центра Солнца. Солнце очень далеко: от каждой его точки на объектив падает параллельный пучок. Пучок от центра диска параллелен оси, и объектив направляет его в фокус A. Окуляр стоит *перед* точкой A на расстоянии y; пучок, идущий в A, после окуляра сходится в точке B на экране (рисунок 2). Формула тонкой линзы для окуляра: предмет мнимый (A за линзой, расстояние $-y$), изображение действительное (x), фокус $-F_2$:

$$-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{F_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{F_2}.$$

Отсюда $y < F_2$: окуляр стоит к A ближе своего фокусного расстояния — только тогда пучок остаётся сходящимся.

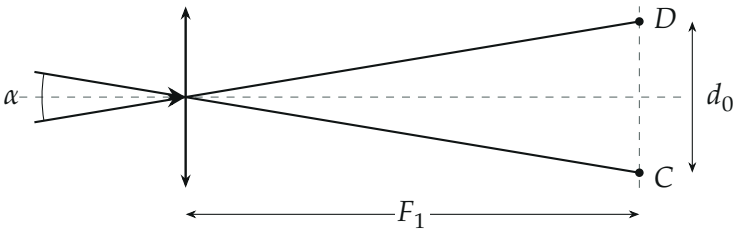


Пучок от центра Солнца: объектив направляет его в фокус A (пунктир — продолжение за окуляр), окуляр собирает его в точке B на экране. Лучи посчитаны по формуле линзы, масштаб условный.

2. Размер промежуточного изображения. Пучок от края диска приходит под углом $\alpha/2$ к оси; объектив собирает его в фокальной плоскости. Достаточно луча через центр объектива — он не преломляется (рисунок 3). Края изображаются в точках C и D:

$$d_0 = CD = 2F_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx F_1\alpha.$$

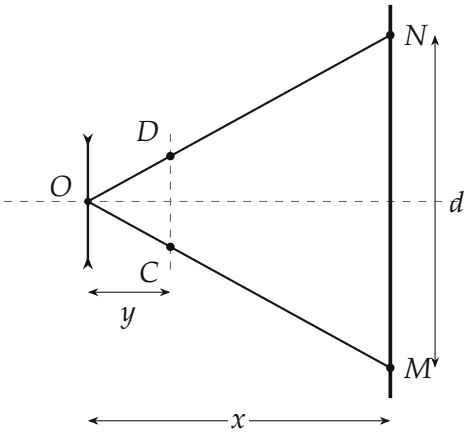
Здесь α в радианах: $\alpha = 0{,}5 \cdot \pi/180 \approx 8{,}73 \cdot 10^{-3}$, $d_0 \approx 1{,}75$ см.



Лучи от краёв Солнца через центр объектива: угол между ними α (сильно преувеличен), изображения краёв C и D в фокальной плоскости объектива.

3. Размер изображения на экране. Пучок, идущий в точку D, окуляр собирает в точку N на экране. Обратим ход лучей: N — источник, D — его мнимое изображение в окуляре; луч через центр O не преломляется, поэтому N, O, D на одной прямой. Так же M, O, C (рисунок 4). Из подобия треугольников OCD и OMN:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{x}{y} = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F_2}\right) = 1 + \frac{x}{F_2}.$$



Мнимые предметы C, D и их изображения M, N на экране лежат на прямых через центр окуляра O; треугольники OCD и OMN подобны.

4. Ответ в общем виде и число.

$$x = F_2\Big(\frac{d}{d_0} - 1\Big) = F_2\Big(\frac{d}{F_1\alpha} - 1\Big),$$

$$x = 4\Big(\frac{0{,}2}{2 \cdot 8{,}73 \cdot 10^{-3}} - 1\Big)\ \text{см} \approx 4 \cdot 10{,}46\ \text{см} \approx 41{,}8\ \text{см}.$$

Тогда $y = \Big(\frac{1}{41{,}8} + \frac{1}{4}\Big)^{-1} \approx 3{,}65$ см: окуляр стоит в 3,65 см перед фокусом объектива, на 0,35 см ближе к объективу, чем в обычном телескопе.

Обратите внимание. Изображение Солнца на экране прямое (относительно промежуточного CD) и увеличенное в $x/y \approx 11{,}5$ раза, хотя линза рассеивающая: для мнимого предмета, стоящего ближе фокуса, рассеивающая линза даёт действительное увеличенное изображение.

Ответ: $x = F_2\Big(\frac{d}{F_1\alpha} - 1\Big) \approx 41{,}8$ см.

Проверка. Размерность: $d/(F_1\alpha)$ безразмерно, x в единицах F_2. Предел $d \to d_0$ (экран без увеличения): $x \to 0$ — экран у самого окуляра, как и должно быть. Предел $y \to F_2$: $x \to \infty$ — окуляр в положении обычного телескопа, пучок параллельный, изображения на конечном расстоянии нет.

Ответ. $x = F_2\Big(\frac{d}{F_1\alpha} - 1\Big) \approx 41{,}8$ см.