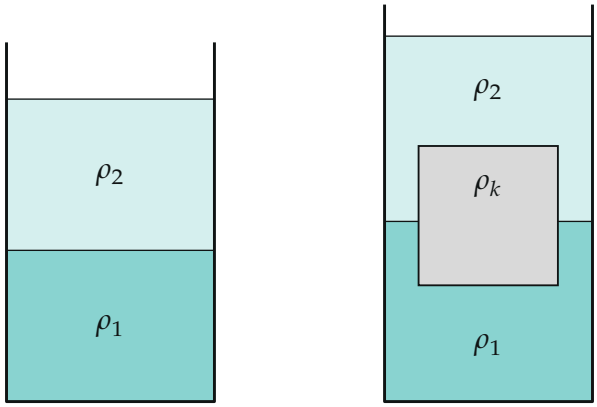
Блок на границе двух жидкостей

Задача 1. [Курчатов 2020/21, 7 класс, задача 1] В высоком цилиндрическом сосуде с площадью дна $S = 120$ см^2 находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями $\rho_1 = 1360$ кг/м^3 и $\rho_2 = 880$ кг/м^3. Внутрь сосуда помещают кубический блок объёмом $V = 400$ см^3 и плотностью $\rho_k = 1100$ кг/м^3. Блок полностью находится внутри жидкости и не касается дна сосуда. Насколько изменится высота разделяющей поверхности двух жидкостей после помещения блока внутрь ёмкости?



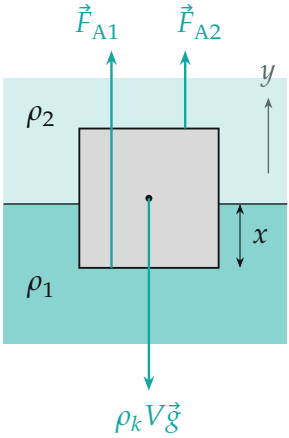
Поясняющий рисунок (в масштабе): сосуд до и после того, как в него опустили блок; блок плавает на границе жидкостей.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плавание тела в двух жидкостях (закон Архимеда). Плотность блока $\rho_k = 1100$ кг/м^3 меньше плотности нижней жидкости и больше плотности верхней: в верхней он тонет, в нижней всплыл бы. Поэтому блок плавает на границе — частью в нижней жидкости, частью в верхней. Часть блока, погружённая в нижнюю жидкость, вытесняет её вверх — граница поднимается. План: из условия плавания найти объём V_x этой части, затем подъём границы $\Delta h = V_x/S$.

Обозначения. V_x — объём блока ниже границы раздела (в нижней жидкости), $V - V_x$ — выше (в верхней); Δh — подъём границы; ось y — вверх.

1. Силы на блок. Сила тяжести $\rho_k V\vec{g}$ — вниз. Каждая жидкость действует на свою часть блока выталкивающей силой, равной весу вытесненной ею жидкости (рисунок 2):

$$F_{A1} = \rho_1 g V_x, \qquad F_{A2} = \rho_2 g (V - V_x).$$



Силы на блок: две выталкивающие силы — от нижней и от верхней жидкости; x — глубина блока в нижней жидкости, $V_x = a^2 x$.

2. Условие плавания. Второй закон Ньютона для блока в покое в проекции на ось y:

$$\rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x) - \rho_k V g = 0.$$

Отсюда

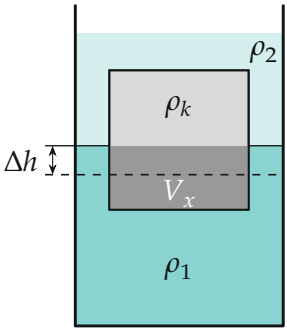
$$V_x(\rho_1 - \rho_2) = V(\rho_k - \rho_2) \quad \Rightarrow \quad V_x = V\,\frac{\rho_k - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 400 \cdot \frac{220}{480} \approx 183\ \text{см}^3.$$

Это меньше V, и $V_x > 0$ — блок действительно на границе.

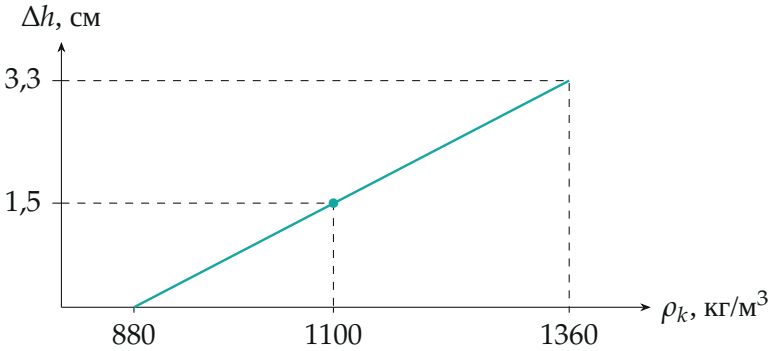
3. Подъём границы. Объём нижней жидкости не изменился, но под границей теперь ещё и часть блока V_x. Сечение сосуда S, поэтому гра-

ница поднимется на (рисунок 3)

$$\Delta h = \frac{V_x}{S} = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)} = \frac{183}{120} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$



Пунктир — граница до опыта, сплошная линия — после. Под границей теперь ещё и тёмная часть блока V_x: граница поднимается на V_x/S.



Подъём границы растёт линейно с плотностью блока: от 0 при $\rho_k = \rho_2$ до $V/S \approx 3{,}3$ см при $\rho_k = \rho_1$; наш блок — точка.

Обратите внимание. Ответ не зависит от толщины слоёв: важно лишь, что блок целиком в жидкости (верхний слой достаточно толстый) и не касается дна. А поднимается граница не на высоту блока и не на V/S, а только на долю V_x/S — остальное поднимает верхний уровень.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{см}^3}{\text{см}^2} = \text{см}$. Пределы: при $\rho_k \to \rho_2$ блок целиком в верхней жидкости, $V_x \to 0$, граница не сдвигается; при $\rho_k \to \rho_1$ блок целиком в нижней, $V_x \to V$, $\Delta h = V/S \approx 3{,}3$ см — верно. Сила Архимеда $1{,}36 \cdot 183 + 0{,}88 \cdot 217 \approx 440$ г$\cdot g$ равна весу блока $1{,}1 \cdot 400 = 440$ г$\cdot g$.

Ответ. Граница поднимется на $\Delta h = \dfrac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)} \approx 1{,}5$ см.