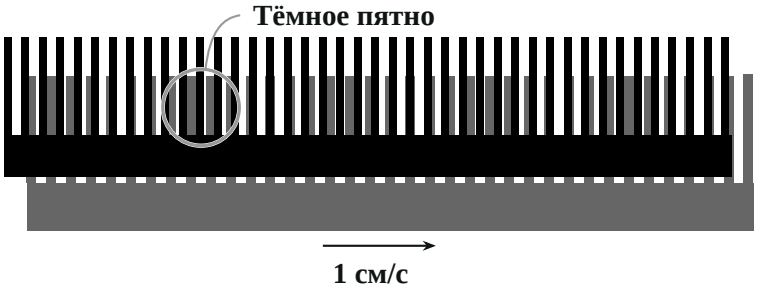
Муаровый узор из двух расчёсок

Задача 2. [Курчатов 2020/21, 7 класс, задача 2] Муаровый узор возникает при наложении двух периодических структур с близкими периодами так, что повторяющиеся элементы то накладываются друг на друга, то образуют промежутки. Рассмотрим в качестве периодических структур две расчёски, изображённые на рисунке. Расчёски имеют слегка отличающиеся расстояния между зубцами, нижняя расчёска двигается со скоростью $v = 1$ см/с вправо относительно верхней. С какой скоростью и в каком направлении двигаются тёмные пятна, изображённые на рисунке?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на муар — «биения» двух решёток с близкими периодами. Тёмное пятно — место, где зубцы нижней расчёски попадают в промежутки верхней и закрывают просвет. Пятно — не предмет, а *место совпадения*; когда нижняя расчёска чуть сдвигается, условие «зубец в промежутке» выполняется уже в другом месте, и это место бежит гораздо быстрее самой расчёски. План: по рисунку найти, сколько зубцов каждой расчёски укладывается на расстоянии между соседними пятнами, затем найти, куда и на сколько смещается пятно при малом сдвиге нижней расчёски.

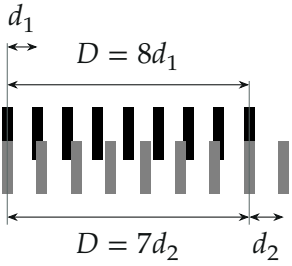
Обозначения. d_1 — шаг верхней расчёски, d_2 — нижней; D — расстояние между соседними тёмными пятнами (период узора); s — сдвиг нижней расчёски; u — скорость пятен.

1. Шаги по рисунку. Измерив рисунок организаторов, получаем: у верхней расчёски 42 зубца с шагом $d_1 \approx 20{,}1$ (в точках рисунка), у нижней 37 зубцов с шагом $d_2 \approx 22{,}9$ — нижняя реже. Тёмные пятна повто-

ряются через $D \approx 161$: на этом отрезке ровно 8 шагов верхней и 7 шагов нижней (рисунок 2):

$$D = 8d_1 = 7d_2.$$

Так и должно быть: от одного пятна до следующего нижняя расчёска «отстаёт» от верхней ровно на один зубец.



Период узора (в масштабе): на расстоянии D между пятнами 8 зубцов верхней расчёски (чёрные) и 7 зубцов нижней (серые).

2. Как сдвигается пятно. Пятно стоит там, где зубец нижней расчёски попал точно в середину промежутка верхней (рисунок 3). Сдвинем нижнюю расчёску вправо на s. Соседний слева зубец нижней расчёски был левее середины своего промежутка на $d_2 - d_1$ (на этот отрезок нижняя «отстаёт» за один зубец). Значит, чтобы зубец пришёл в середину промежутка, нижнюю нужно сдвинуть вправо на $d_2 - d_1$ — и пятно переместится на один шаг d_1 *влево*. Отношение смещений:

$$\frac{\text{смещение пятна}}{\text{сдвиг расчёски}} = \frac{d_1}{d_2 - d_1} = \frac{d_1}{d_1(8/7) - d_1} = 7.$$

Сдвиг на целый зубец d_2 переносит пятно на $7d_2 = D$ — узор совпадает с исходным, как и должно быть.

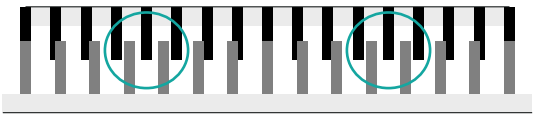


Схема в масштабе: зубцы нижней расчёски (серые) в середине промежутков верхней (чёрные) — там тёмные пятна (бирюзовые овалы); расстояние между ними $D = 8d_1$.



Нижняя расчёска сдвинулась вправо на $s = d_2/4$, а пятна — влево на $7s$ (пунктир — прежнее место).

3. Скорость и направление. Сдвиги делятся на время: нижняя расчёска едет вправо со скоростью v, пятна — влево со скоростью

$$u = \frac{d_1}{d_2 - d_1}\,v = 7v = 7 \text{ см/с}.$$

Обратите внимание. Направление зависит от того, какая расчёска реже. Если бы реже была верхняя ($d_1 > d_2$), пятна бежали бы в ту же сторону, что и нижняя расчёска. Здесь реже нижняя, и пятна бегут навстречу её движению — влево. Компьютерный расчёт положения пятна x из условия «зубец в середине промежутка»

$$\frac{x}{d_1} - \frac{x - s}{d_2} = k + \frac{1}{2} \qquad (k \text{ — целое})$$

даёт $\Delta x/s = -7{,}0$ при шагах с рисунка.

Проверка. Скорость пятна — это скорость «места совпадения», а не вещества, поэтому она может во много раз превышать скорость расчёски. Пределы: при $d_2 \to d_1$ (одинаковые расчёски) $u \to \infty$ — весь узор «мигает» сразу; при сильно разных шагах узор мелкий и движется почти со скоростью расчёски.

Ответ. Пятна движутся влево (навстречу движению нижней расчёски) со скоростью $u = \dfrac{d_1}{d_2 - d_1}v = 7v = 7$ см/с.