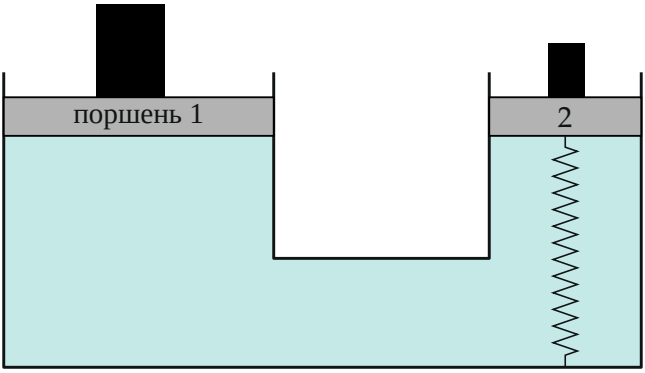
Сообщающиеся сосуды с поршнями и пружиной

Задача 4. [Курчатов 2020/21, 7 класс, задача 4] Два сообщающихся сосуда, заполненных жидкостью, закрыты подвижными невесомыми поршнями, к одному из которых прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жёсткости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени на поршнях помещены гирьки, причём масса гирьки 1 в четыре раза больше массы гирьки 2. Площадь поршня 1 равна $S_1 = 100$ см^2. Пружина при этом не растянута, а поршни находятся на одном уровне. Плотность жидкости равна $\rho = 0{,}5$ г/см^3. На рисунке изображено начальное состояние системы. Затем на поршень 1 дополнительно ставят гирьку массы $m = 500$ г. Найдите возникающее при этом удлинение пружины. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



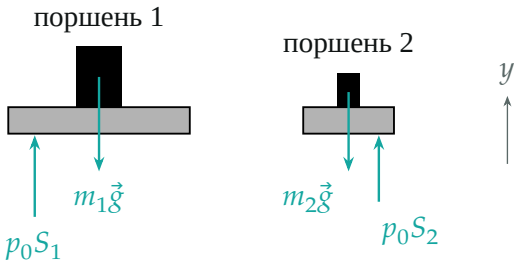
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на гидростатику сообщающихся сосудов (закон Паскаля, давление столба жидкости). Добавленная гирька давит на поршень 1, он опускается, жидкость перетекает и поднимает поршень 2. Пружина прикреплена ко дну и к поршню 2, поэтому поршень 2, поднимаясь, растягивает её — её удлинение равно подъёму поршня 2. Два уравнения: сохранение объёма жидкости и равенство давлений на одном уровне.

Обозначения. $m_1 = 4m_2$ — массы начальных гирек; S_2 — площадь поршня 2; Δx_1 — опускание поршня 1, Δx_2 — подъём поршня 2 (=

удлинение пружины); p_0 — начальное давление под поршнями; ось y — вверх.

1. Начальное состояние: отношение площадей. Поршни невесомы, пружина не растянута. Под каждым поршнем давление жидкости уравновешивает вес его гирьки (второй закон Ньютона для поршня в проекции на y, рисунок 2): $p_0 S_1 = m_1 g$, $p_0 S_2 = m_2 g$. Поршни на одном уровне, значит давления под ними одинаковы (жидкость покоится, по закону Паскаля давление на одной высоте одно и то же):

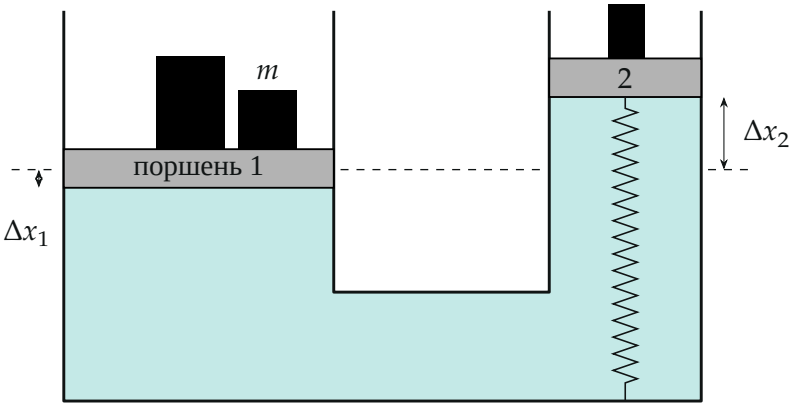
$$\frac{m_1 g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{m_2}{m_1} S_1 = \frac{S_1}{4} = 25 \text{ см}^2.$$



Начальное состояние: на каждый поршень вниз — вес гирьки, вверх — сила давления жидкости $p_0 S$; давление p_0 под поршнями одинаковое.

2. Сохранение объёма. Жидкость несжимаема: сколько ушло из-под поршня 1, столько пришло под поршень 2 (рисунок 3):

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{S_1}{S_2} \Delta x_1 = 4 \Delta x_1.$$

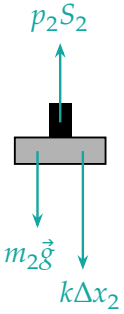


После того как поставили гирьку m (смещения увеличены для наглядности): поршень 1 опустился на Δx_1, поршень 2 поднялся на $\Delta x_2 = 4\Delta x_1$ и растянул пружину; пунктир — прежний уровень поршней.

3. Равновесие поршня 2. Теперь пружина растянута на Δx_2 и тянет поршень 2 вниз с силой $k\Delta x_2$ (рисунок 4). Второй закон Ньютона для поршня 2 в проекции на y:

$$p_2 S_2 - m_2 g - k\Delta x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{m_2 g}{S_2} + \frac{k\Delta x_2}{S_2} = p_0 + \frac{k\Delta x_2}{S_2}.$$

Для поршня 1 (на нём гирьки m_1 и m): $p_1 S_1 = (m_1 + m)g$, $p_1 = p_0 + \dfrac{mg}{S_1}$.



Силы на поршень 2 после: пружина тянет вниз (стрелка давления для наглядности проведена из центра).

4. Равенство давлений. Поршень 2 теперь выше поршня 1 на $\Delta x_1 + \Delta x_2$. Давление в покоящейся жидкости растёт с глубиной на $\rho g h$, поэтому на уровне нижней грани поршня 1

$$p_1 = p_2 + \rho g(\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Подставим p_1, p_2 и $\Delta x_2 = 4\Delta x_1$, $S_2 = S_1/4$; начальное p_0 сокращается:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g \cdot 5\Delta x_1 + \frac{4k \cdot 4\Delta x_1}{S_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = \frac{mg}{5\rho g S_1 + 16k}.$$

Числа: $5\rho g S_1 = 5 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 0{,}01 = 250$ Н/м, $16k = 1600$ Н/м:

$$\Delta x_1 = \frac{0{,}5 \cdot 10}{250 + 1600} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta x_2 = 4\Delta x_1 = \frac{4mg}{5\rho g S_1 + 16k} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 10{,}8 \text{ мм}.$$

Обратите внимание. Спрашивают удлинение пружины — это подъём поршня 2, Δx_2, а не опускание поршня 1. У организаторов в ответе $\Delta x_1 \approx 2{,}7$ мм; удлинение пружины в 4 раза больше. И пружина «стоит» в 16 раз жёстче, чем кажется: малый поршень увеличивает и путь (×4), и требуемое давление (×4).

Проверка. Размерность: $\frac{\text{Н}}{\text{Н/м}} = \text{м}$. Пределы: без пружины ($k = 0$) $\Delta x_1 = \frac{m}{5\rho S_1} = 2$ см — лишнее давление mg/S_1 уравновешено только разностью уровней $5\Delta x_1$, верно; при очень жёсткой пружине поршни почти не сдвигаются. Подстановка: $p_1 - p_0 = 500$ Па; $p_2 - p_0 = \frac{100 \cdot 0{,}0108}{0{,}0025} = 432$ Па; $\rho g \cdot 5\Delta x_1 = 68$ Па; $432 + 68 = 500$ — верно.

Ответ. Удлинение пружины $\Delta x_2 = \frac{4mg}{5\rho g S_1 + 16k} \approx 10{,}8$ мм (поршень 1 опускается на $\Delta x_1 \approx 2{,}7$ мм).