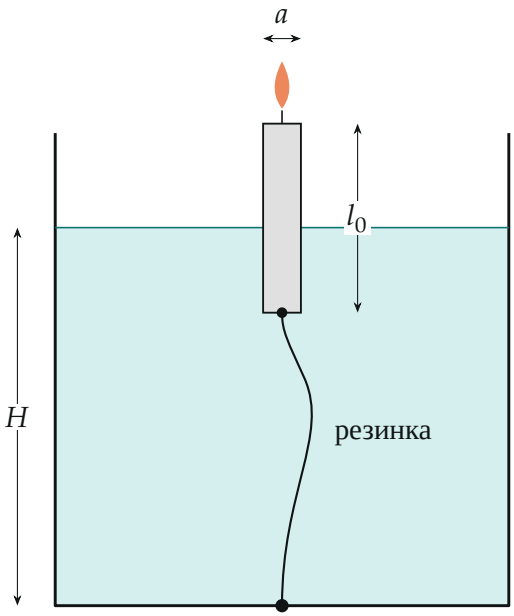
Горящая свеча на резинке

Задача 5. [Курчатов 2020/21, 7 класс, задача 5] В тазу с водой плавает свеча, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Высота свечи $l_0 = 10$ см, длина стороны основания $a = 2$ см. Плотность материала свечи равна $\rho_с = 0{,}45$ г/см^3. К центру нижнего основания свечи прикреплена невесомая упругая резинка с коэффициентом упругости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени резинка не растянута и имеет длину $L = 16$ см. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, высота уровня воды равна $H = 20$ см. Свечу поджигают, и она начинает равномерно и медленно гореть, так что высота свечи уменьшается на 1 см в 1 минуту. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Найдите момент времени, когда резинка начнёт натягиваться. Найдите момент времени, когда прекратится горение свечи.



Поясняющий рисунок: свеча плавает, резинка от дна таза к центру нижнего основания свечи провисает.

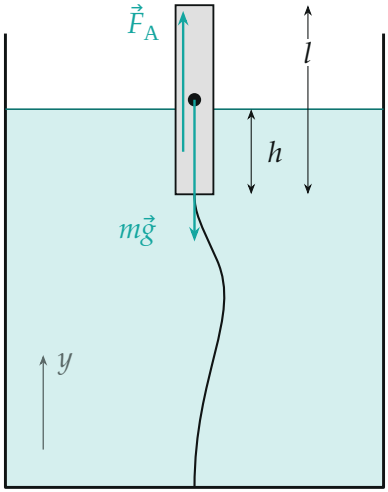
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие плавающего тела. Свеча горит медленно, поэтому в каждый момент она в равновесии: сумма сил на неё равна нулю. Пока резинка провисает, на свечу действуют только сила тяжести и сила Архимеда: свеча легче воды и плавает, погрузившись на $\rho_с/\rho_в = 0{,}45$ своей длины. Свеча укорачивается, погружённая часть уменьшается, нижнее основание поднимается к поверхности — и в какой-то момент резинка выпрямляется. Дальше резинка тянет свечу вниз и не даёт ей всплыть. Горение прекратится, когда фитиль (верх свечи) опустится до уровня воды — вся оставшаяся свеча окажется под водой.

Обозначения. l — длина (высота) свечи в момент t; h — длина её погружённой части; $c = 1$ см/мин — скорость сгорания, $l = l_0 - ct$; F_A — сила Архимеда; $F_{упр}$ — сила упругости резинки; Δ — удлинение резинки. Ось y направим вертикально вверх.

1. Резинка провисает: равновесие свечи. Масса свечи $m = \rho_с a^2 l$, объём погружённой части $a^2 h$. Условие равновесия (первый закон Ньютона) в проекции на ось y (рисунок 2):

$$F_A - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_в a^2 hg = \rho_с a^2 lg \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_с}{\rho_в} l = 0{,}45\, l.$$

В начальный момент $h = 0{,}45 \cdot 10 = 4{,}5$ см, и нижнее основание свечи находится на высоте $H - h = 15{,}5$ см над дном — меньше длины резинки $L = 16$ см: резинка действительно провисает, как сказано в условии.



Резинка провисает: на свечу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (из середины свечи) и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (из середины погружённой части h). Стрелки сдвинуты, чтобы не сливаться.

2. Когда резинка натягивается. Резинка становится прямой и нерастянутой, когда нижнее основание свечи поднимается на высоту L над дном, то есть погружённая часть становится равной

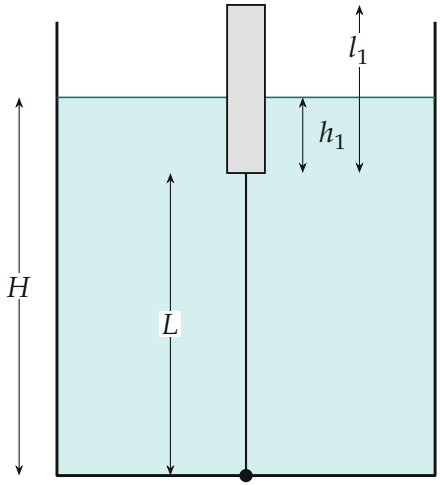
$$h_1 = H - L = 20 - 16 = 4 \text{ см}$$

(рисунок 3). По шагу 1 это случится при длине свечи

$$l_1 = \frac{\rho_в}{\rho_с} h_1 = \frac{4}{0{,}45} = \frac{80}{9} \text{ см} \approx 8{,}89 \text{ см}.$$

Свеча к этому моменту сгорела на $l_0 - l_1 = 10/9$ см, на это нужно

$$t_1 = \frac{l_0 - l_1}{c} = \frac{10}{9} \text{ мин} \approx 1{,}1 \text{ мин}.$$



Момент t_1: резинка выпрямилась, но ещё не растянута; $h_1 + L = H$.

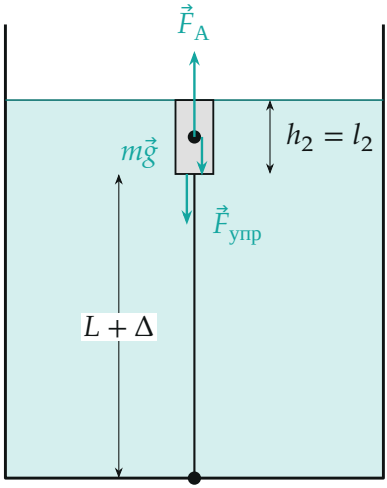
3. Резинка растянута: равновесие свечи. После момента t_1 свеча продолжает укорачиваться и стремится всплыть выше, но резинка не пускает: она растягивается и тянет свечу вниз. Нижнее основание на высоте $H - h$ над дном, удлинение резинки $\Delta = H - h - L$, сила упругости $F_{\text{упр}} = k\Delta$ направлена вниз (рисунок 4). Первый закон Ньютона в проекции на ось y:

$$F_{\text{A}} - mg - F_{\text{упр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{в}} a^2 g\, h = \rho_{\text{с}} a^2 g\, l + k\,(H - L - h).$$

Отсюда глубина погружения

$$h = \frac{\rho_{\text{с}} a^2 g\, l + k(H - L)}{\rho_{\text{в}} a^2 g + k}.$$

Посчитаем коэффициенты в СИ: $\rho_{\text{в}} a^2 g = 1000 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 4$ Н/м, $\rho_{\text{с}} a^2 g = 1{,}8$ Н/м, а $k = 100$ Н/м — резинка в 25 раз «жёстче» воды. Поэтому h почти не меняется: при $l = l_1$ получается $h = 4$ см (как и должно быть), а дальше h уменьшается совсем чуть-чуть. Свеча сгорает, а её нижний край стоит почти на месте — верх свечи опускается к воде.



Момент t_2: верх свечи на уровне воды, свеча гаснет. Резинка растянута на Δ и тянет свечу вниз.

4. Когда горение прекратится. Свеча гаснет, когда её верх доходит до уровня воды: вся свеча под водой, $h = l$ (рисунок 4). Подставим $h = l = l_2$ в уравнение равновесия шага 3:

$$\rho_{\text{в}} a^2 g\, l_2 = \rho_{\text{с}} a^2 g\, l_2 + k\,(H - L - l_2) \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{k\,(H - L)}{k + (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{с}})\, a^2 g}.$$

Числа в СИ:

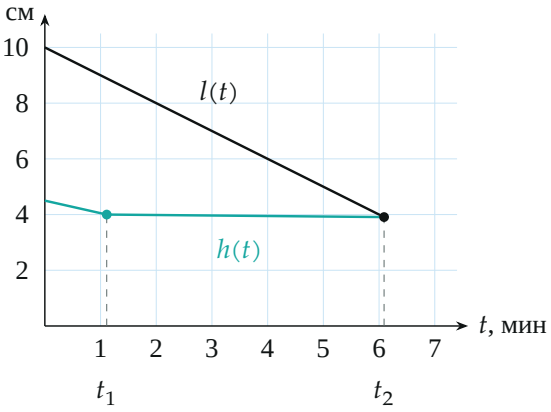
$$l_2 = \frac{100 \cdot 0{,}04}{100 + 550 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10} = \frac{4}{102{,}2}\ \text{м} \approx 0{,}039\ \text{м} = 3{,}9\ \text{см}.$$

Значит, $l_2 > 0$: свеча гаснет, не догорев до конца. К этому моменту сгорело $l_0 - l_2 \approx 6{,}1$ см, и

$$t_2 = \frac{l_0 - l_2}{c} \approx 6{,}1\ \text{мин}$$

от момента поджига (через 5,0 мин после того, как натянулась резинка). Удлинение резинки в этот момент $\Delta = H - L - l_2 \approx 0{,}09$ см — меньше миллиметра.

5. Как менялось погружение. На рисунке 5 — длина свечи $l(t)$ и глубина погружения $h(t)$, посчитанные по формулам шагов 1 и 3. До t_1 глубина $h = 0{,}45\,l$ убывает вместе с длиной; после t_1 она почти постоянна. Прямая $l(t)$ догоняет $h(t)$ в момент t_2 — это и есть погасание.



Длина свечи l и длина погружённой части h в зависимости от времени. Излом $h(t)$ — момент t_1, пересечение графиков — момент t_2.

Обратите внимание. Свеча гаснет не тогда, когда сгорит целиком, а когда фитиль уйдёт под воду. Если бы резинки не было, $h = 0{,}45\,l < l$ всегда и свеча догорела бы до конца; именно резинка не даёт ей всплывать.

Ответ: резинка начнёт натягиваться, горение прекратится в моменты

$$t_1 = \frac{l_0}{c} - \frac{\rho_в (H - L)}{c\,\rho_с} \approx 1{,}1 \text{ мин},$$

$$t_2 = \frac{1}{c}\Big(l_0 - \frac{k(H - L)}{k + (\rho_в - \rho_с)a^2 g}\Big) \approx 6{,}1 \text{ мин};$$

свеча к этому времени укоротится до 3,9 см и целиком уйдёт под воду.

Проверка. Размерность: $k(H - L)$ — в ньютонах, знаменатель — в Н/м, l_2 — в метрах. Предел: при очень жёсткой резинке ($k \to \infty$) $l_2 \to H - L = 4$ см — нижний край не сдвигается с высоты L, свеча гаснет при длине, равной глубине до этого края; при мягкой резинке ($k \to 0$)

$l_2 \to 0$ — свеча догорает почти целиком. Наши 3,9 см чуть меньше 4 см, как и должно быть при большой, но конечной жёсткости.

Ответ. Резинка начнёт натягиваться через $t_1 = 10/9$ мин $\approx 1{,}1$ мин после поджига; горение прекратится через $t_2 \approx 6{,}1$ мин после поджига (свеча длиной $\approx 3{,}9$ см целиком уйдёт под воду).