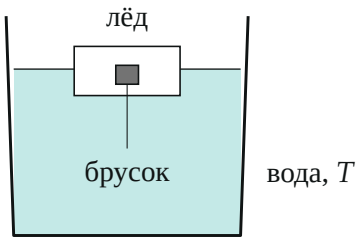
Лёд с бруском в ведре с водой

Задача 1. [Курчатов 2020/21, 8 класс, задача 1] Металлический брусок массой $m = 10$ г и плотностью $\rho = 8900$ кг/м^3 целиком вморожен в небольшой монолитный кусок льда без полостей массой $M = 130$ г. Температура льда и бруска одинакова и равна 0 °C. Лёд помещают в небольшое ведро, заполненное водой до объёма $V = 0{,}4$ л с начальной температурой T. Какой должна быть температура воды T, чтобы после достижения теплового равновесия кусок льда с металлическим бруском опустился на дно ведра. Теплообменом ведра с окружающей средой пренебречь. Теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг · °C), плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность льда составляет $\rho_1 = 900$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: в начале лёд с бруском плавает.

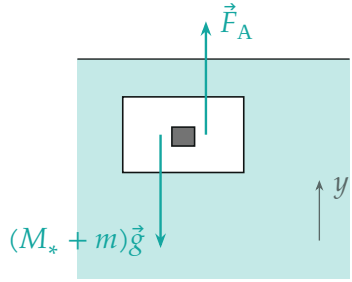
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на плавание тел и тепловой баланс. Сначала кусок плавает: его средняя плотность меньше плотности воды (объём льда с бруском $\frac{130}{0{,}9} + \frac{10}{8{,}9} \approx 145{,}6$ см^3, вода такого объёма весит 145,6 г, а кусок — 140 г). Тёплая вода отдаёт тепло, лёд тает при 0 °C, льда становится меньше, а тяжёлый брусок остаётся — средняя плотность куска растёт. Когда она сравняется с плотностью воды, кусок утонет. План: найти, сколько льда M_* должно остаться, потом — сколько тепла нужно на таяние остального.

Обозначения. M_* — масса льда в куске, когда он начинает тонуть; $V_б = m/\rho$ — объём бруска; $c = 4200$ Дж/(кг·°C); ось y — вверх.

1. Условие начала погружения. На кусок, погружённый целиком, действуют сила тяжести $(M_* + m)\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (рисунок 2).

Он тонет, когда сила тяжести сравнялась с наибольшей возможной силой Архимеда. Второй закон Ньютона в проекции на ось y на пороге:

$$F_A - (M_* + m)g = 0, \qquad F_A = \rho_0 g\Big(\frac{m}{\rho} + \frac{M_*}{\rho_1}\Big).$$



Порог погружения: кусок целиком под водой, сила Архимеда равна силе тяжести.

2. Сколько льда должно остаться. Сократим g и соберём слагаемые с M_*:

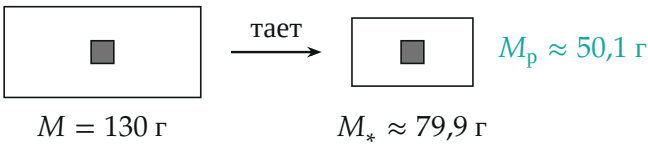
$$M_*\Big(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\Big) = m\Big(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\Big),$$

$$M_* = m\,\frac{\rho_1(\rho - \rho_0)}{\rho(\rho_0 - \rho_1)} = 10 \cdot \frac{900 \cdot 7900}{8900 \cdot 100} \approx 79{,}9 \text{ г}.$$

Смысл: «лишний вес» бруска в воде $mg(1 - \rho_0/\rho)$ должен компенсироваться «подъёмной силой» льда $M_* g(\rho_0/\rho_1 - 1)$.

3. Сколько льда растаяло.

$$M_\text{р} = M - M_* = 130 - 79{,}9 = 50{,}1 \text{ г}.$$

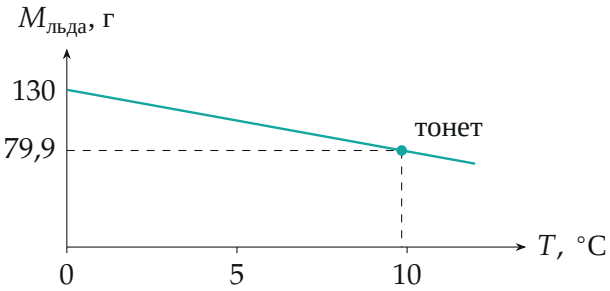


Брусок остаётся, лёд вокруг него подтаивает с 130 г до 79,9 г.

4. Тепловой баланс. Лёд с бруском при 0 °C, после равновесия лёд ещё остался — значит, общая температура 0 °C, и брусок тепла не получает и не отдаёт. Уравнение теплового баланса: тепло, отданное водой при остывании от T до 0 °C, ушло на плавление $M_\text{р}$ льда ($\rho_0 V = 0{,}4$ кг — масса воды):

$$c\rho_0 V\,(T-0) = \lambda M_\text{р} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{\lambda M_\text{р}}{c\rho_0 V} = \frac{330\cdot 10^3\cdot 0{,}0501}{4200\cdot 0{,}4} \approx 9{,}8\,^\circ\text{C}.$$

При большей T растает больше льда, и кусок тем более утонет; при меньшей — останется плавать.



Сколько льда остаётся при разной начальной температуре воды: $M_{льда} = 130 - \frac{c\rho_0 V}{\lambda} T$ (г); кусок тонет, когда осталось не больше 79,9 г.

Обратите внимание. Сила Архимеда здесь — на объём и льда, и бруска: брусок вморожен и погружается вместе с куском. И в тепловом балансе нет теплоёмкости бруска и льда: их температура не меняется.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/кг}\cdot\text{кг}}{\text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)}\cdot\text{кг}} = {}^\circ\text{C}$. Предел: при $\rho \to \rho_0$ (брусок плавает сам) $M_* \to 0$ — растаять должен весь лёд, верно. Числа: при $M_* = 79{,}9$ г объём куска $88{,}8 + 1{,}12 = 89{,}9$ см^3, масса 89,9 г — средняя плотность равна плотности воды.

Ответ. $T = \dfrac{\lambda}{c\rho_0 V}\left(M - m\,\dfrac{\rho_1(\rho-\rho_0)}{\rho(\rho_0-\rho_1)}\right) \approx 9{,}8\,^\circ\text{C}$ (не ниже этой температуры).