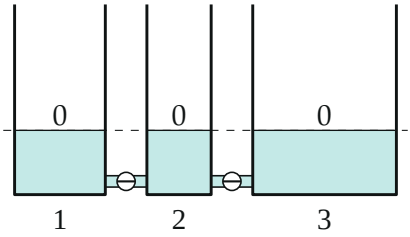
Три сосуда с кранами

Задача 2. [Курчатов 2020/21, 8 класс, задача 2] Три цилиндрических сосуда соединены трубками так, что первый сосуд соединён со вторым, а второй с третьим, на трубках установлены краны, позволяющие перекрывать трубки. В начальный момент времени краны открыты, а уровень жидкости таков, что места прикреплений трубок к сосудам погружены под воду. Сначала перекрыли кран между сосудом 1 и сосудом 2, а затем налили некоторый объём воды в сосуд 2, после чего уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1 см. Затем был перекрыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, а после этого открыт кран между сосудом 1 и сосудом 2. В сосуд 2 снова налили то же количество воды, что и в первый раз, и уровень воды в сосуде 2 поднялся на 2 см по сравнению с уровнем непосредственно перед вторым наливанием воды. Далее был снова открыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, и оказалось, что уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1,5 см по сравнению с уровнем до самого первого наливания воды. Найдите отношение диаметра сосуда 3 к диаметру сосуда 1.



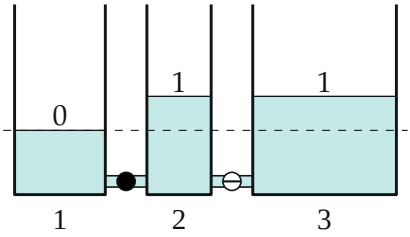
Поясняющий рисунок: начальное состояние, оба крана открыты (белый кружок — кран открыт, чёрный — закрыт). Ширина сосудов — как в ответе.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сообщающиеся сосуды и сохранение объёма воды. В открытых друг другу сосудах уровни одинаковы; налитый объём распределяется по суммарной площади соединённых сосудов: $\Delta V = S\,\Delta h$. Записав объём воды на каждом этапе, получим уравнения на площади сечений. Диаметр найдём в конце: площадь круга пропорциональна квадрату диаметра.

Обозначения. S_1, S_2, S_3 — площади сечений сосудов; V — объём одной порции воды; уровни отсчитываем от начального (пунктир), в сантиметрах; $h_1 = 1$ см, $h_2 = 2$ см, $h_3 = 1{,}5$ см.

1. Первое наливание. Кран 1–2 закрыт, сосуды 2 и 3 соединены, поэтому уровень в них поднимается одинаково — на $h_1 = 1$ см (рисунок 2). Объём порции распределился по площади $S_2 + S_3$:

$$V = (S_2 + S_3)\, h_1.$$

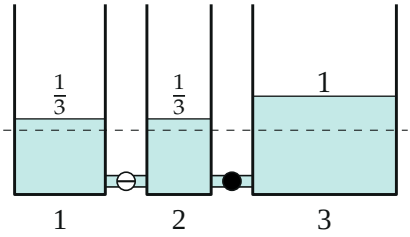


После первого наливания: в сосудах 2 и 3 уровень 1 см, в сосуде 1 — прежний.

2. Переливание между 1 и 2. Кран 2–3 закрыли (в сосуде 3 уровень остался h_1), открыли 1–2. Вода из сосуда 2 перетекает в 1 до общего уровня h; объём в паре 1–2 сохраняется:

$$(S_1 + S_2)\, h = S_2 h_1 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S_2 h_1}{S_1 + S_2}.$$

С ответом $S_1 = 2S_2$ это $h = \frac{1}{3}$ см (рисунок 3).



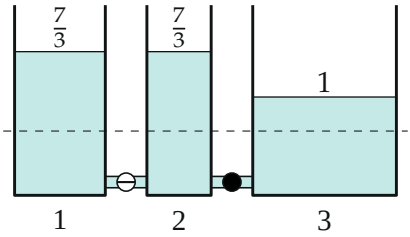
Кран 2–3 закрыт, 1–2 открыт: уровни в 1 и 2 выровнялись на $\frac{1}{3}$ см, в сосуде 3 — 1 см.

3. Второе наливание. Та же порция V налита в соединённые сосуды 1 и 2 — уровень в обоих поднялся на $h_2 = 2$ см (до $h + h_2 = \frac{7}{3}$ см, рисунок 4):

$$V = (S_1 + S_2)\, h_2.$$

Приравняем две записи одной порции V:

$$(S_2 + S_3)h_1 = (S_1 + S_2)h_2 \quad \Rightarrow \quad S_2 + S_3 = 2S_1 + 2S_2. \qquad (1)$$

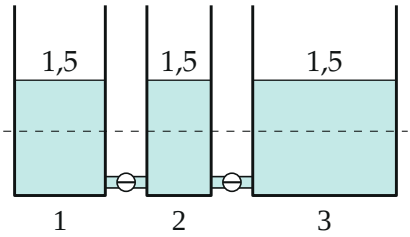


После второго наливания: в сосудах 1 и 2 уровень $\frac{7}{3}$ см, в сосуде 3 — по-прежнему 1 см.

4. Все краны открыты. Уровни во всех трёх сосудах сравнялись на $h_3 = 1{,}5$ см (рисунок 5). Вся налитая вода — две порции — распределилась по площади всех трёх сосудов:

$$(S_1 + S_2 + S_3)\, h_3 = 2V = 2(S_2 + S_3)h_1 \quad \Rightarrow \quad 1{,}5S_1 = 0{,}5S_2 + 0{,}5S_3,$$

$$S_2 + S_3 = 3S_1. \qquad (2)$$



Все краны открыты: общий уровень 1,5 см.

5. Решаем систему. Из (1) и (2): $3S_1 = 2S_1 + 2S_2$, откуда $S_1 = 2S_2$ и $S_3 = 3S_1 - S_2 = 5S_2$. Значит,

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{5}{2}, \qquad \frac{d_3}{d_1} = \sqrt{\frac{S_3}{S_1}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58,$$

так как $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Обратите внимание. Спрашивают отношение *диаметров*, а уравнения дают отношение *площадей*. У организаторов в ответе $\frac{5}{2}$ — это S_3/S_1; отношение диаметров — корень из него.

Проверка. Возьмём $S_2 = 1, S_1 = 2, S_3 = 5$: порция $V = (1{+}5)\cdot 1 = 6$; после переливания $h = \frac{1}{3}$; второе наливание: $6/(2+1) = 2$ см — верно; в конце $(2 \cdot \frac{7}{3} + 1 \cdot \frac{7}{3} + 5 \cdot 1)/8 = 12/8 = 1{,}5$ см — верно. Отношение безразмерно, как и должно быть.

Ответ. $\frac{d_3}{d_1} = \sqrt{\frac{S_3}{S_1}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58$ (отношение площадей $\frac{S_3}{S_1} = \frac{5}{2}$).