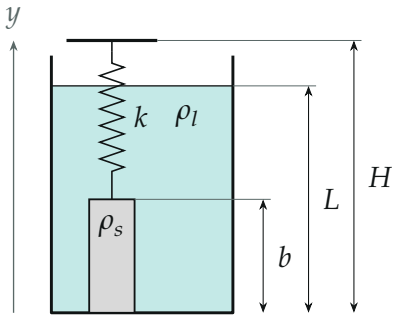
Брусок на дне, пружина и жидкость

Задача 4. [Курчатов 2020/21, 8 класс, задача 4] Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда высоты $b = 20$ см и квадратным основанием со стороной $a = 5$ см. Плотность материала бруска $\rho_s = 7$ г/см^3. Брусок стоит на дне сосуда, высота уровня жидкости равна $L = 40$ см, плотность жидкости равна $\rho_l = 1$ г/см^3, причём нижняя грань бруска так плотно прилегает ко дну сосуда, что жидкость не проникает между нижней гранью бруска и дном сосуда. Верхняя грань бруска крепится на пружину с коэффициентом жёсткости $k = 500$ Н/м, которая в нерастянутом состоянии имеет длину $l = 20$ см. На какой максимальной высоте H относительно дна сосуда можно закрепить верхний конец пружины, чтобы нижняя грань бруска не отрывалась от дна сосуда? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на равновесие тела в жидкости, но *без силы Архимеда*. Сила Архимеда — это равнодействующая давлений жидкости на все грани; здесь под нижней гранью жидкости нет, снизу на брусок она не давит. Жидкость только прижимает брусок ко дну, давя на верхнюю грань. Пружина тянет брусок вверх; чем выше закреплён её верхний конец, тем сильнее она растянута и тем сильнее тянет. Предельный случай — сила пружины сравнялась с силами, прижимающими брусок, и дно перестало давить на брусок ($N = 0$).

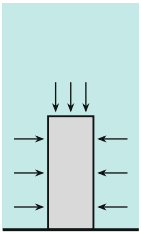
Обозначения. Δx — растяжение пружины; N — сила реакции дна; F_p — сила давления жидкости на верхнюю грань; ось y — вверх (рисунок

3). Давление считаем избыточным (над атмосферным), как у организаторов, — см. «Обратите внимание».

1. Давление на грани бруска. Верхняя грань — на глубине $L - b$, давление жидкости там $\rho_l g(L-b)$, сила давления направлена вниз:

$$F_p = \rho_l g(L-b)\, a^2 = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}05^2 = 5 \text{ Н}.$$

Силы давления на боковые грани попарно равны и противоположны — они сокращаются. На нижнюю грань жидкость не давит (рисунок 2).



Давление жидкости на брусок: боковые силы сокращаются, сверху давит, снизу — нет.

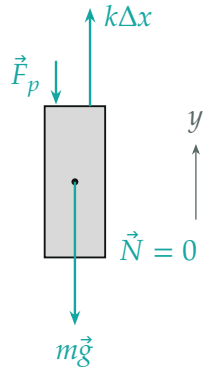
2. Силы на брусок. Сила тяжести $mg = \rho_s a^2 b g$, сила давления F_p — вниз; сила упругости пружины $k\Delta x$ и реакция дна N — вверх (рисунок 3). Второй закон Ньютона для покоящегося бруска в проекции на ось y:

$$k\Delta x + N - \rho_s a^2 b g - \rho_l g(L-b)a^2 = 0.$$

Брусок не отрывается, пока $N \geq 0$. На пределе $N = 0$:

$$\Delta x = \frac{\rho_s a^2 b g + \rho_l g(L-b)a^2}{k} = \frac{35+5}{500} = 0{,}08 \text{ м} = 8 \text{ см},$$

где $mg = 7000 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}20 \cdot 10 = 35$ Н.

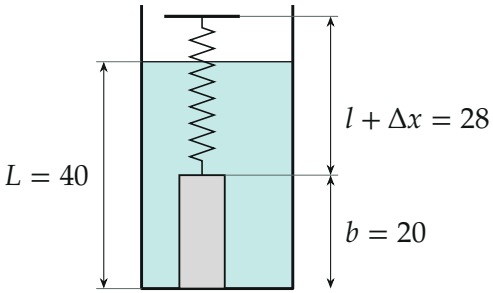


Силы на брусок на пределе отрыва: реакция дна обратилась в ноль.

3. Высота крепления пружины. Пружина длиной $l + \Delta x$ стоит на верхней грани бруска (высота b), поэтому (рисунок 4)

$$H = b + l + \Delta x = 20 + 20 + 8 = 48 \text{ см}.$$

Выше 48 см пружина растянута больше, тянет сильнее 40 Н — брусок оторвётся; ниже — прижат к дну.



Предельное положение в масштабе (см): $H = b + l + \Delta x = 48$ см.

Обратите внимание. Брусок плотно прижат ко дну, жидкости под ним нет — поэтому формула Архимеда $\rho_l g a^2 b$ не работает; давление сверху не уравновешено давлением снизу. Атмосферное давление тоже давит на верхнюю грань (через жидкость) и не давит снизу; как и организаторы, мы его не учитываем — иначе к F_p добавилось бы $p_0 a^2 \approx 250$ Н.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м/с}^2}{\text{Н/м}} = \text{м}$. Если бы жидкость проникала под брусок, на него действовала бы сила Архимеда $\rho_l g a^2 b = 5$ Н вверх, и нужное растяжение было бы $\frac{35-5}{500} = 6$ см, $H = 46$ см: плотное прилегание «прижимает» брусок на 10 Н сильнее.

Ответ. $H = b + l + \dfrac{\rho_s a^2 b g + \rho_l g (L-b) a^2}{k} = 48$ см.