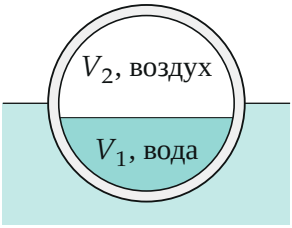
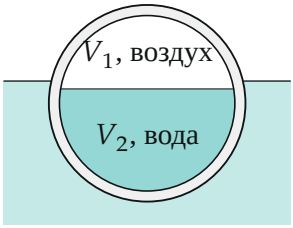
Ледяной шар с полостью

Задача 5. [Курчатов 2020/21, 8 класс, задача 5] В таз с водой погружают ледяной шар, в котором есть замкнутая полость, частично заполненная водой — V_1, а частично — воздухом — V_2. Шар погружён в воду только наполовину. Если поместить в таз с водой такой же шар, но изменить содержимое полости так, что объём V_1, ранее занимаемый водой, теперь занимает воздух, а объём V_2, который прежде был занят воздухом, теперь занимает вода, то шар погрузится в воду на $2/3$. Найдите отношение объёма полости к объёму шара. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3. Силой тяжести, действующей на воздух в полости, пренебречь.



погружён наполовину



погружён на $2/3$

Поясняющий рисунок: тот же шар в двух опытах; серый слой — лёд, в полости вода и воздух меняются местами.

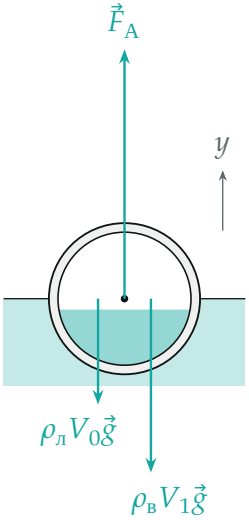
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плавание тел (закон Архимеда). Шар плавает — сила Архимеда равна полной силе тяжести шара: льда и воды в полости. Лёд в двух опытах один и тот же, меняется только масса воды в полости ($\rho_в V_1$ или $\rho_в V_2$), и от этого меняется глубина погружения. Два условия плавания дают два уравнения на две неизвестные доли — объём льда и объём V_1.

Обозначения. V — объём шара; V_0 — объём льда; $V_п = V_1 + V_2 = V - V_0$ — объём полости; доли $\alpha = \dfrac{V_0}{V}$, $\beta = \dfrac{V_1}{V}$, тогда $\dfrac{V_2}{V} = 1 - \alpha - \beta$; ось y — вверх.

1. Первый опыт. На шар действуют сила тяжести льда $\rho_л V_0 \vec{g}$, сила тяжести воды в полости $\rho_в V_1 \vec{g}$ и сила Архимеда на погружённую поло-

вину $\rho_в \frac{V}{2}\vec{g}$ (рисунок 2). Второй закон Ньютона для плавающего шара в проекции на ось y:

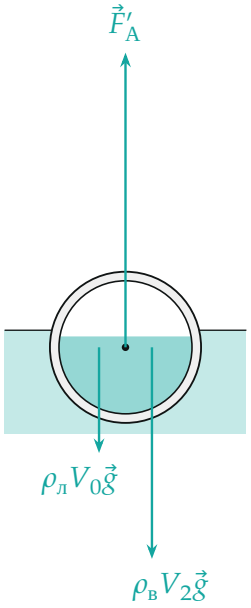
$$\rho_в \frac{V}{2} g - \rho_л V_0 g - \rho_в V_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho_в = \rho_л \alpha + \rho_в \beta. \qquad (1)$$



Силы на шар в первом опыте: сила Архимеда на половину объёма шара.

2. Второй опыт. Теперь в полости вода объёмом V_2, погружено $\frac{2}{3}V$ (рисунок 3). Тот же закон в проекции на y:

$$\rho_в \frac{2}{3} V g - \rho_л V_0 g - \rho_в V_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\rho_в = \rho_л \alpha + \rho_в (1 - \alpha - \beta). \qquad (2)$$



Второй опыт: воды в полости больше, шар тонет глубже — на $\frac{2}{3}$ объёма.

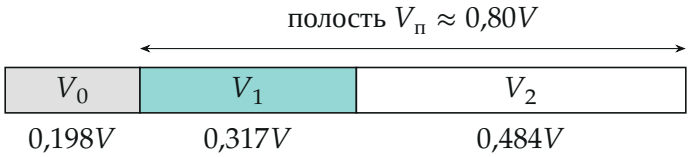
3. Решаем систему. Сложим (1) и (2): β сокращается,

$$\frac{1}{2}\rho_{\text{в}} + \frac{2}{3}\rho_{\text{в}} = 2\rho_{\text{л}}\alpha + \rho_{\text{в}}(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\rho_{\text{в}}}{6(2\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{в}})} = \frac{1}{6 \cdot 0{,}84} \approx 0{,}198.$$

Доля полости

$$\frac{V_{\text{п}}}{V} = 1 - \alpha = \frac{12\rho_{\text{л}} - 7\rho_{\text{в}}}{12\rho_{\text{л}} - 6\rho_{\text{в}}} = \frac{4{,}04}{5{,}04} \approx 0{,}80.$$

Из (1) $\beta = 0{,}5 - 0{,}92 \cdot 0{,}198 \approx 0{,}317$, и $\frac{V_2}{V} \approx 0{,}484$ — обе доли положительны, решение осмысленно (рисунок 4).



Как делится объём шара: лёд, часть полости V_1 и часть V_2 (в масштабе).

Обратите внимание. Сила Архимеда зависит только от погружённой части объёма шара, а не от того, что внутри; содержимое полости входит только в силу тяжести. Вода в полости объёма V_1 весит $\rho_в V_1 g$ — воздух не весит ничего.

Проверка. Подставим $\alpha = 0{,}198$, $\beta = 0{,}317$: в (1) $0{,}92 \cdot 0{,}198 + 0{,}317 = 0{,}500$; в (2) $0{,}92 \cdot 0{,}198 + 0{,}484 = 0{,}666 \approx \frac{2}{3}$ — верно. Отношение безразмерно. Предел: если бы шар был сплошным ($\alpha = 1$), он погружался бы на 0,92 при любом раскладе — погружения $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ возможны только с большой полостью.

Ответ. $\dfrac{V_п}{V} = \dfrac{12\rho_л - 7\rho_в}{12\rho_л - 6\rho_в} \approx 0{,}8.$