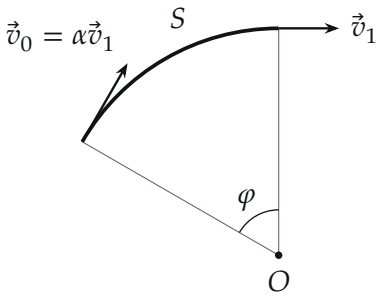
Поезд на закруглении

Задача 1. [Курчатов 2020/21, 9 класс, задача 1] Пассажирский поезд движется по дугообразному участку железной дороги, равномерно замедляя скорость. Длина участка равна S, а время, необходимое поезду, чтобы проехать по нему, равно t. После прохождения участка направление поезда изменилось на угол φ, в начале участка скорость поезда была в α раз больше, чем в конце участка. Найдите связь между массой пассажира m, сидящего в поезде, и весом пассажира P в момент, когда поезд находится в середине участка. Найдите массу пассажира, если $P = 840$ Н, $S = 1{,}5$ км, $t = 60$ с, $\alpha = 1{,}5$, $\varphi = 60°$ и $g = 9{,}8$ м/с^2.



Поясняющий рисунок (вид сверху): дуга длины S, скорость поезда поворачивается на угол φ и уменьшается в α раз.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на криволинейное движение и вес. Поезд движется по дуге окружности и тормозит равномерно: у него два горизонтальных ускорения — касательное (торможение) и нормальное (поворот). Вес пассажира — сила, с которой он давит на сиденье; по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой сиденье действует на пассажира. По второму закону Ньютона эта сила вместе с $m\vec{g}$ даёт пассажиру ускорение поезда.

Обозначения. $v_0 = \alpha v_1$ и v_1 — скорости в начале и в конце участка, v_c — в середине (по пути); a_τ и a_n — касательное и нормальное ускорения; r — радиус дуги; $\vec{N}$ — сила действия сиденья на пассажира, $P = N$.

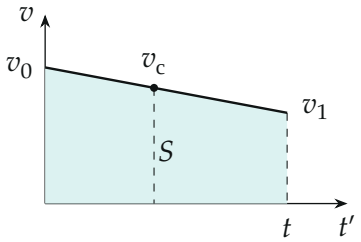
1. Скорость в конце. При равнозамедленном движении средняя скорость — среднее арифметическое начальной и конечной:

$$\frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{S}{t} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2S}{(\alpha+1)t} = \frac{2 \cdot 1500}{2{,}5 \cdot 60}\ \text{м/с} = 20\ \text{м/с},$$

$$v_0 = \alpha v_1 = 30\ \text{м/с}.$$

2. Касательное ускорение. Скорость убывает равномерно (рисунок 2):

$$a_\tau = \frac{v_0 - v_1}{t} = \frac{(\alpha-1)v_1}{t} = \frac{2S(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)} = \frac{20 \cdot 0{,}5}{60}\ \text{м/с}^2 \approx 0{,}167\ \text{м/с}^2.$$



Скорость убывает линейно; путь S — площадь трапеции. Точка v_c делит площадь пополам (середина пути), она правее середины по времени.

3. Скорость в середине пути. Для равнопеременного движения $v^2 - v_{\text{нач}}^2 = 2as$; запишем для двух половин пути $S/2$ с одним и тем же ускорением:

$$v_0^2 - v_c^2 = v_c^2 - v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_c = \sqrt{\frac{v_0^2 + v_1^2}{2}} = v_1\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2}} \approx 25{,}5\ \text{м/с}.$$

4. Нормальное ускорение. Дуга длины S стягивает центральный угол φ (скорость поворачивается вместе с радиусом), поэтому $r = S/\varphi = 1500/(\pi/3) \approx 1432$ м и

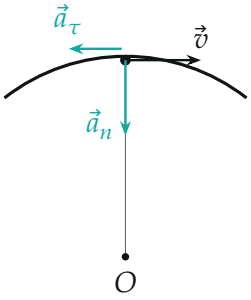
$$a_n = \frac{v_c^2}{r} = \frac{2S\varphi}{t^2} \cdot \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \approx \frac{650}{1432}\ \text{м/с}^2 \approx 0{,}454\ \text{м/с}^2.$$

5. Второй закон Ньютона для пассажира. На пассажира действуют $m\vec{g}$ и сила $\vec{N}$ со стороны сиденья (вместе с полом и спинкой). Ускорение пассажира — ускорение поезда $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (рисунки 3 и 4):

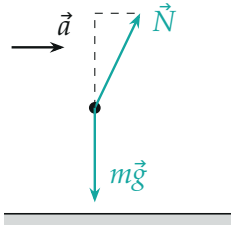
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}).$$

Векторы $\vec{g}$ (вниз), $\vec{a}_n$ (к центру дуги) и $\vec{a}_\tau$ (против скорости) взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора

$$P = N = m\sqrt{g^2 + a_n^2 + a_\tau^2}.$$



Ускорения поезда в середине участка (вид сверху): нормальное — к центру O, касательное — против скорости.



Силы, действующие на пассажира; горизонтальная составляющая $\vec{N}$ сообщает ускорение $\vec{a}$ (масштаб a увеличен).

6. Масса пассажира.

$$m = \frac{P}{\sqrt{g^2 + a_n^2 + a_\tau^2}} = \frac{840}{\sqrt{9{,}8^2 + 0{,}454^2 + 0{,}167^2}}\ \text{кг} \approx 85{,}6\ \text{кг}.$$

Обратите внимание. Скорость в середине *пути* — не среднее v_0 и v_1 (это скорость в середине *времени*, 25 м/с), а среднее квадратичное, 25,5 м/с: вторую половину пути поезд проходит дольше.

Проверка. Размерность: $\dfrac{S}{t^2}$ — м/с^2, φ безразмерен. Предел: $\alpha \to 1$, $\varphi \to 0$ (прямой путь с постоянной скоростью) — $P = mg$. Смысл: горизонтальные ускорения малы по сравнению с g и меняют вес лишь на 0,1 %: без них масса была бы $840/9{,}8 \approx 85{,}7$ кг.

Ответ. $P = m\sqrt{g^2 + \left(\dfrac{2S(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)}\right)^2 + \left(\dfrac{2S\varphi}{t^2}\cdot\dfrac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}\right)^2}$; $m \approx 85{,}6$ кг.