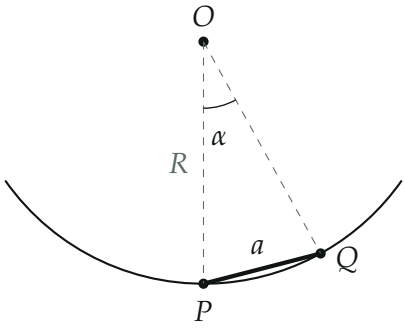
Стержень в гладкой сфере

Задача 2. [Курчатов 2020/21, 9 класс, задача 2] Тонкий стержень длины $a = 1$ м лежит в неподвижной сфере радиуса $R = 2$ м так, что один конец находится в нижней точке сферы P. Сфера гладкая за исключением окрестности точки P много меньшей длины стержня. Найдите минимальный коэффициент трения в окрестности точки P, при котором такое положение стержня возможно.



Поясняющий рисунок: стержень PQ длины a — хорда сферы радиуса R; α — центральный угол хорды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела с трением. На стержень действуют тяжесть в середине, реакция гладкой сферы в верхнем конце Q (по радиусу к центру O) и реакция в нижнем конце P: нормальная (вертикально вверх, к O) плюс сила трения покоя вдоль касательной, т. е. горизонтально. Без трения стержень соскользнул бы. Из условий равновесия найдём требуемое отношение $F_{\text{тр}}/N_1$; минимальный коэффициент трения равен ему.

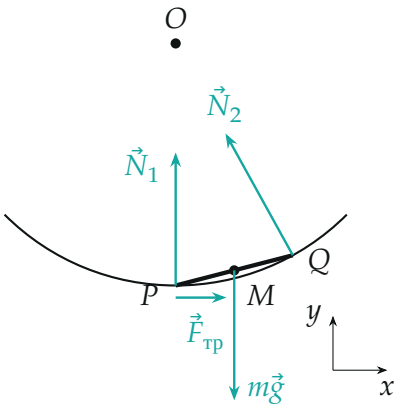
Обозначения. O — центр сферы, Q — верхний конец, M — середина стержня; $\alpha = \angle POQ$; N_1 и $F_{\text{тр}}$ — нормальная реакция и сила трения в P, N_2 — реакция в Q; ось x горизонтально в сторону Q, y — вверх, начало в P.

1. Геометрия. Стержень — хорда длины a, поэтому $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{1}{4}$;

отсюда

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{7}{8}, \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Координаты: $Q = (R\sin\alpha,\ R(1-\cos\alpha))$, $M = (\frac{1}{2}R\sin\alpha,\ \frac{1}{2}R(1-\cos\alpha))$; направление $\vec{N}_2$ — от Q к O: $(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$.



Силы, действующие на стержень. Реакция $\vec{N}_2$ толкает стержень от Q к оси сферы; трение в P направлено в сторону Q и не даёт нижнему концу съехать.

2. Правило моментов относительно P. Моменты $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$ относительно P равны нулю. Момент силы $\vec{N}_2$, приложенной в Q: $M = x_Q F_y - y_Q F_x = N_2 R(\sin\alpha\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\sin\alpha) = N_2 R\sin\alpha$. Момент тяжести: $-mg\cdot\frac{1}{2}R\sin\alpha$. Сумма равна нулю:

$$N_2 R\sin\alpha = \frac{1}{2}mgR\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad N_2 = \frac{mg}{2}.$$

3. Второй закон Ньютона (равновесие) в проекциях.

$$x:\ F_{тр} = N_2\sin\alpha = \frac{mg}{2}\sin\alpha;$$

$$y:\ N_1 = mg - N_2\cos\alpha = mg\Big(1 - \frac{\cos\alpha}{2}\Big).$$

4. Условие трения покоя. Стержень не скользит, пока $F_{\text{тр}} \le \mu N_1$:

$$\mu \ge \frac{F_{\text{тр}}}{N_1} = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha} = \frac{\sqrt{15}/8}{9/8} = \frac{\sqrt{15}}{9} \approx 0{,}43.$$

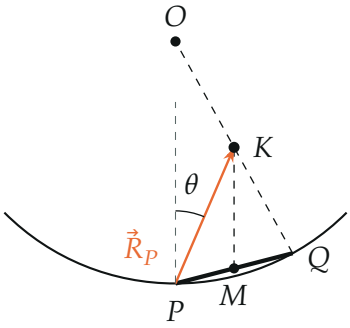
Через данные задачи ($\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$; знаменатель $2-\cos\alpha = 1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}$):

$$\mu_{\min} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{a}{R}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2}}{1+\frac{a^2}{2R^2}}.$$

5. Второй способ: три силы пересекаются в одной точке. Сложим $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ в полную реакцию $\vec{R}_P$. Тело в равновесии под действием трёх непараллельных сил — их линии действия пересекаются в одной точке K (рисунок 3). Линия $\vec{N}_2$ проходит через O, линия $m\vec{g}$ — вертикаль через M; они пересекаются в середине отрезка QO: $K = \left(\frac{1}{2}R\sin\alpha,\ \frac{1}{2}R(2-\cos\alpha)\right)$. Реакция $\vec{R}_P$ идёт по PK, и её угол θ с вертикалью

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_{\text{тр}}}{N_1} = \frac{x_K}{y_K} = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$$

— то же. Условие равновесия: $\operatorname{tg}\theta \le \mu$ (реакция внутри конуса трения).

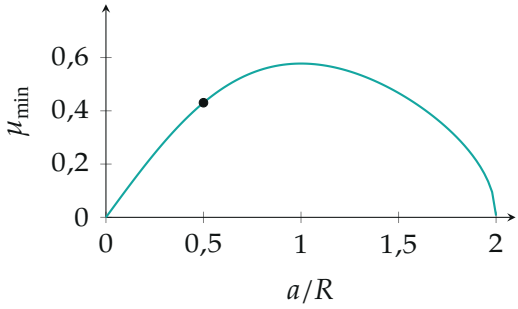


Линии $\vec{N}_2$ (через O), $m\vec{g}$ (вертикаль через M) и полной реакции $\vec{R}_P$ в точке P пересекаются в точке K — середине QO. Угол θ реакции с вертикалью не

должен превышать угла трения.

Обратите внимание. Реакция гладкой сферы в Q направлена к центру O, а не перпендикулярно стержню: опора — поверхность сферы, а не стержень.

Проверка. Безразмерность: μ зависит только от a/R. Предел $a \to 0$: стержень почти горизонтален на дне, $\mu_{\min} \to 0$ — горизонтальный стержень лежит и без трения. Предел $a = 2R$ (стержень — диаметр, вертикален): $\mu_{\min} = 0$ — вертикальный стержень тоже стоит без трения. Между ними $\mu_{\min}$ проходит через максимум (рисунок 4); при $a/R = 0{,}5$ это 0,43.



Минимальный коэффициент трения в зависимости от отношения a/R; точка — условие задачи.

Ответ. $$\mu_{\min} = \frac{\dfrac{a}{R}\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2}}{1+\dfrac{a^2}{2R^2}} = \frac{\sqrt{15}}{9} \approx 0{,}43.$$