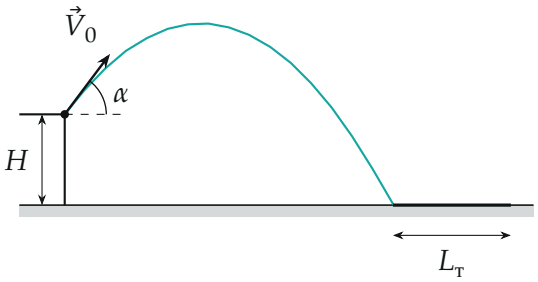
Приземление кошки

Задача 3. [Курчатов 2020/21, 9 класс, задача 3] Кошка совершает прыжок с края стола высоты H, приобретая начальную скорость V_0, направленную под углом α к горизонту, таким что $\sin\alpha = \sqrt{2gH}/V_0$. Длина лап кошки равна l, при этом $l \ll H$. Приземление кошки на пол с коэффициентом трения μ происходит таким образом, что на кошку действует минимально возможная сила реакции опоры. Найдите тормозной путь кошки в двух случаях: а) коэффициент трения $\mu \ll \operatorname{ctg}\alpha$; б) коэффициент трения $\mu \gg \operatorname{ctg}\alpha$.



Поясняющий рисунок: прыжок со стола высоты H; траектория посчитана при $\sin\alpha = \sqrt{2gH}/V_0$ (здесь $\alpha \approx 53°$); после приземления кошка тормозит на пути L_m.

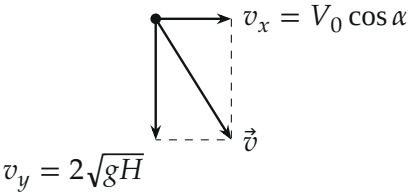
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на удар о пол с трением. Кошка падает, у неё есть вертикальная и горизонтальная скорости. Приземляясь, она гасит вертикальную скорость на длине лап l; минимально возможная реакция — постоянная на всём пути l (при переменной силе её максимум был бы больше). Пока лапы сжимаются, реакция пола огромна ($\sim mgH/l$), и трение μN тоже — оно может погасить горизонтальную скорость ещё во время приземления. Кто «успеет» раньше — решает отношение μ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Обозначения. v_x, v_y — проекции скорости перед касанием пола; N — сила реакции во время приземления; τ — время приземления; Δv — изменение горизонтальной скорости за τ; ось x — горизонтально по движению, y — вверх.

1. Скорость перед касанием. В полёте v_x не меняется, а вертикальную найдём из закона сохранения энергии для вертикального движения (рисунок 2):

$$v_x = V_0 \cos\alpha,$$

$$v_y^2 = V_0^2 \sin^2\alpha + 2gH = 4gH \quad \Rightarrow \quad v_y = 2\sqrt{gH}.$$



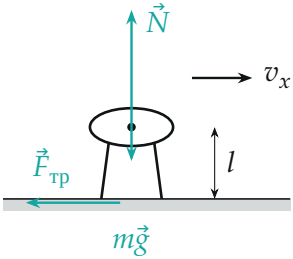
Скорость кошки перед касанием пола и её проекции.

2. Реакция пола при приземлении. Центр масс опускается на длину лап l, и вертикальная скорость гасится до нуля. Теорема о кинетической энергии для вертикального движения при постоянной N:

$$(N - mg)\, l = \frac{mv_y^2}{2} = 2mgH \quad \Rightarrow \quad N = mg\left(1 + \frac{2H}{l}\right) \approx \frac{2mgH}{l}.$$

Торможение по вертикали равнозамедленное, средняя скорость $v_y/2$, поэтому время приземления

$$\tau = \frac{l}{v_y/2} = \frac{2l}{v_y} = \frac{l}{\sqrt{gH}}.$$



Во время приземления: огромная постоянная реакция пола и трение μN против движения; тяжесть по сравнению с ними мала (стрелки не в масштабе).

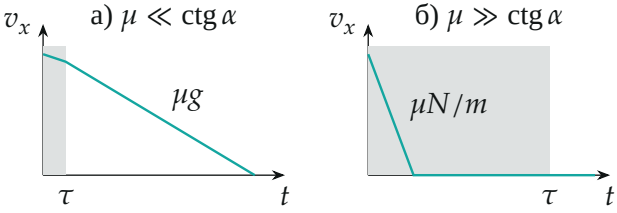
3. Сколько горизонтальной скорости теряется при приземлении. Закон изменения импульса для горизонтального движения: трение скольжения μN за время τ (если кошка ещё скользит) уменьшает v_x на

$$\Delta v = \frac{\mu N \tau}{m} = \mu \frac{2gH}{l} \cdot \frac{l}{\sqrt{gH}} = 2\mu\sqrt{gH}.$$

Сравним с v_x. Из условия $V_0 \sin\alpha = \sqrt{2gH}$, поэтому $v_x = V_0 \cos\alpha = \sqrt{2gH}\operatorname{ctg}\alpha$ и

$$\frac{\Delta v}{v_x} = \frac{\sqrt{2}\,\mu}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

а) $\mu \ll \operatorname{ctg}\alpha$: $\Delta v \ll v_x$, за приземление скорость почти не меняется, кошка тормозит уже стоя на лапах. б) $\mu \gg \operatorname{ctg}\alpha$: «запаса» Δv с избытком хватает, кошка останавливается ещё во время приземления (рисунок 4).



Горизонтальная скорость кошки после касания (серая полоса — время приземления τ). а) За τ скорость почти не меняется, дальше — торможение с ускорением μg. б) Скорость гасится за малую долю τ с огромным ускорением $\mu N/m$. Схематично.

4. Тормозной путь. Теорема о кинетической энергии для горизонтального движения: работа силы трения гасит $mv_x^2/2$.

а) Кошка тормозит после приземления, $N = mg$, путь за время приземления пренебрежимо мал:

$$\mu mg\, L_\text{т} = \frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad L_\text{т} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{2\mu g}.$$

б) Кошка останавливается во время приземления, трение $\mu N = 2\mu mgH/l$:

$$\mu\,\frac{2mgH}{l}\,L_{\text{т}} = \frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad L_{\text{т}} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha\, l}{4\mu gH}.$$

Обратите внимание. В случае б) трение определяется не весом кошки, а реакцией приземления, которая в $2H/l$ раз больше mg — поэтому путь в $2H/l$ раз меньше формулы а). В случае а) путь за время приземления действительно мал: он порядка $v_x\tau \sim l\operatorname{ctg}\alpha$, а отношение к $L_{\text{т}} = H\operatorname{ctg}^2\alpha/\mu$ равно $\sim \mu l/(H\operatorname{ctg}\alpha) \ll 1$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{V_0^2}{g}$ — м, $\dfrac{l}{H}$ безразмерно. Согласованность: на границе $\mu \sim \operatorname{ctg}\alpha$ ответ б) $= \dfrac{l}{2H}\cdot$ а) и путь б) порядка $v_x\tau$ — пути за время приземления, как и должно быть. Смысл: на шершавом полу кошка гасит разбег прямо в момент касания, «втыкаясь» лапами.

Ответ. а) $L_{\text{т}} = \dfrac{V_0^2\cos^2\alpha}{2\mu g}$; б) $L_{\text{т}} = \dfrac{V_0^2\cos^2\alpha\, l}{4\mu gH}$.