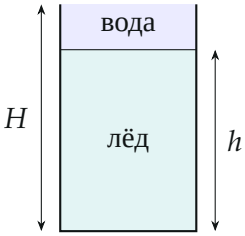
Таяние льда порциями горячей воды

Задача 4. [Курчатов 2020/21, 9 класс, задача 4] Цилиндрический бачок высоты H содержит слой льда толщины $h = \frac{4}{5}H$ при температуре 0 °C. В бачок наливают до полного заполнения объёма цилиндра воду с температурой 50 °C, потом долго ждут, затем всю воду выливают. Какое минимальное число раз нужно повторить эту операцию, чтобы растопить весь лёд. Считать, что теплообмена с окружающей средой нет. Теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · °C), плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок: первая операция — на слой льда $h = \frac{4}{5}H$ налита горячая вода до верха.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса, повторённое много раз. Горячая вода остывает до 0 °C и плавит часть льда; талую воду выливают вместе с остывшей. Чем тоньше становится лёд, тем больше горячей воды помещается в следующий раз — и тем больше льда она растопит. Толщина слоя воды растёт в геометрической прогрессии.

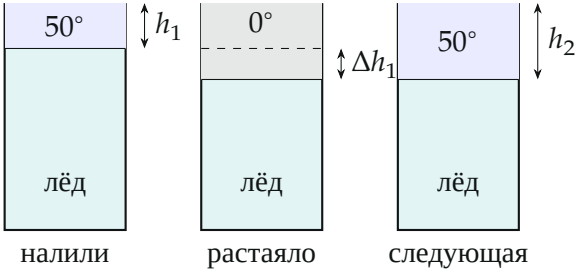
Обозначения. S — площадь дна; h_n — толщина слоя горячей воды при n-й операции; Δh_n — толщина растаявшего за неё слоя льда; $T_1 = 50$ °C.

1. Уравнение теплового баланса для одной операции. Ждут долго, теплообмена с окружением нет, а льда хватает — значит, всё приходит к 0 °C (рисунок 2). Теплота, отданная водой массы $\rho_в h_n S$ при остывании

от T_1 до 0 °C, идёт на плавление льда массы $\rho_л \Delta h_n S$:

$$c_в \rho_в h_n S\, T_1 = \lambda \rho_л \Delta h_n S \quad \Rightarrow \quad \Delta h_n = k h_n,$$

$$k = \frac{c_в \rho_в T_1}{\lambda \rho_л} = \frac{4200 \cdot 1000 \cdot 50}{3{,}4 \cdot 10^5 \cdot 900} \approx 0{,}686.$$



Одна операция: горячая вода слоем h_1 остывает до 0 °C и растапливает слой льда $\Delta h_1 = k h_1$; после слива следующей порции воды помещается $h_2 = h_1 + \Delta h_1$. Пропорции — по расчёту.

2. Прогрессия. После n-й операции лёд стал тоньше на Δh_n, и при следующей наливают воды на столько же больше:

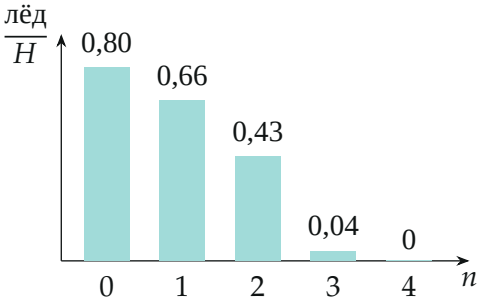
$$h_{n+1} = h_n + k h_n = (1 + k) h_n \quad \Rightarrow$$

$$h_{n+1} = (1 + k)^n h_1, \qquad h_1 = H - h = \frac{H}{5}.$$

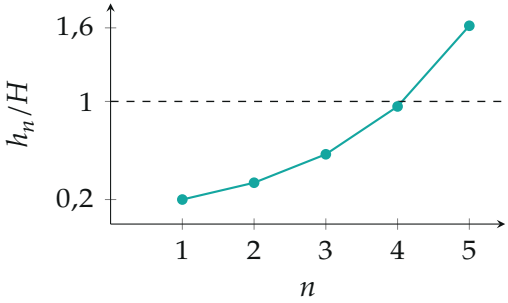
3. Условие «весь лёд растаял». После n операций толщина льда $H - h_{n+1}$ должна стать нулевой (формально — слой воды не меньше высоты бачка):

$$h_{n+1} \geq H \quad \Rightarrow \quad (1 + k)^n \geq \frac{H}{H - h} = 5.$$

Подбором: $1{,}686^2 \approx 2{,}84$, $1{,}686^3 \approx 4{,}79 < 5$, $1{,}686^4 \approx 8{,}09 > 5$. Наименьшее $n = 4$. Толщина льда после каждой операции — на рисунке 3, по точкам рост слоя воды — на рисунке 4.



Толщина льда (в долях H) после n операций: после третьей остаётся 4 % льда, четвёртая растапливает всё.



Слой горячей воды $h_n = (1+k)^{n-1}h_1$ при n-й операции; пунктир — высота бачка. При $n = 4$ слой $0{,}96H$ — последний кусок льда $0{,}04H$ растапливается этой порцией с запасом.

Обратите внимание. В четвёртой операции воды может растопить больше льда, чем осталось, — тогда температура не опускается до нуля, и формула $\Delta h = kh$ перестаёт работать. На ответ это не влияет: нам важно лишь, что запаса хватает. Лёд считаем примёрзшим ко дну (иначе он всплыл бы, $\rho_л < \rho_в$).

Проверка. Размерность k: $\dfrac{\text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)}\cdot\text{кг/м}^3\cdot{}^\circ\text{C}}{\text{Дж/кг}\cdot\text{кг/м}^3}$ — безразмерно.

Второй способ — прямой счёт толщины льда (в долях H):

$$0{,}8 - 0{,}686\cdot 0{,}2 = 0{,}663, \qquad 0{,}663 - 0{,}686\cdot 0{,}337 = 0{,}431,$$
$$0{,}431 - 0{,}686\cdot 0{,}569 = 0{,}041,$$

и четвёртой порции $0{,}959H$ хватает на $0{,}66H$ льда. Смысл: из-за прогрессии каждая операция «съедает» больше предыдущей, и почти весь лёд уходит на третьей.

Ответ. $n = 4$ (наименьшее n с $(1+k)^n \geq \dfrac{H}{H-h} = 5$, где $k = \dfrac{c_\text{в}\rho_\text{в}T_1}{\lambda\rho_\text{л}} \approx 0{,}69$).