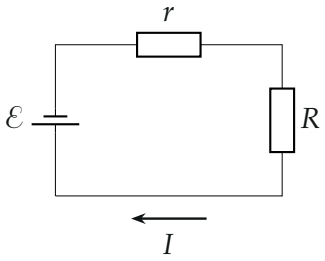
Максимальная мощность на резисторах

Задача 5. [Курчатов 2020/21, 9 класс, задача 5] У экспериментатора Глюка в наборе имеется батарейка с внутренним сопротивлением 1 Ом, при коротком замыкании через неё проходит ток 1 А. Также имеется четыре внешних разных резистора с сопротивлениями: 1,5 Ом, 2 Ом, 3 Ом, 6 Ом. Какой набор резисторов нужно составить и как нужно собрать электрическую схему из имеющихся элементов для выделения максимальной тепловой мощности на внешних резисторах? Чему равна эта мощность?



Поясняющий рисунок: батарейка — идеальный источник $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r; все внешние резисторы вместе — одно сопротивление R.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на закон Ома для полной цепи и мощность тока. Батарейка — это ЭДС $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением r. Внешние резисторы, как их ни соедини, для батарейки — одно сопротивление R. Значит, надо найти, при каком R мощность на внешней части цепи наибольшая, а потом собрать такое R из набора.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС, $r = 1$ Ом — внутреннее сопротивление, $I_0 = 1$ А — ток короткого замыкания, R — сопротивление внешней части, I — ток, P — мощность на внешних резисторах.

1. ЭДС батарейки. При коротком замыкании внешнее сопротивление равно нулю, и по закону Ома для полной цепи $I_0 = \mathcal{E}/r$:

$$\mathcal{E} = I_0 r = 1 \cdot 1 = 1 \text{ В}.$$

2. Мощность на внешнем сопротивлении. Закон Ома для полной цепи (рисунок 1): $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$. Мощность, выделяемая на R (закон Джоуля

— Ленца):

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Качественно: при $R \to 0$ ток наибольший, но $P = I^2R \to 0$; при $R \to \infty$ ток $\to 0$ и $P \to 0$. Между ними есть максимум (рисунок 2).

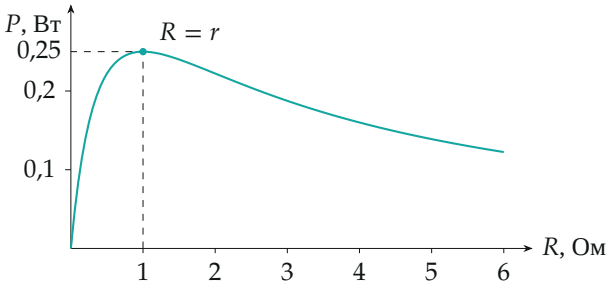
3. Где максимум. Разделим числитель и знаменатель на R:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R + 2r + \dfrac{r^2}{R}}.$$

Знаменатель $R + \dfrac{r^2}{R} = \left(\sqrt{R} - \dfrac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 2r \geq 2r$, равенство — при $R = r$. Значит, знаменатель наименьший, а мощность наибольшая при

$$R = r = 1 \text{ Ом}, \qquad P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{I_0^2 r}{4} = \frac{1^2 \cdot 1}{4} = 0{,}25 \text{ Вт}.$$

Второй способ увидеть то же: $P = \mathcal{E}I - I^2 r$ — парабола по I с вершиной при $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2r} = 0{,}5$ А, то есть когда $R + r = 2r$.



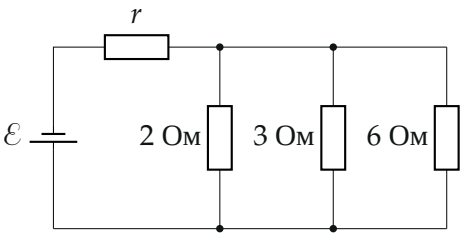
Мощность на внешней части цепи $P = \dfrac{R}{(1+R)^2}$ *Вт* ($\mathcal{E} = 1$ *В*, $r = 1$ *Ом*): *максимум* 0,25 *Вт при* $R = 1$ *Ом.*

4. Как собрать $R = 1$ Ом. Все резисторы набора больше 1 Ом, поэтому последовательное соединение только увеличит сопротивление —

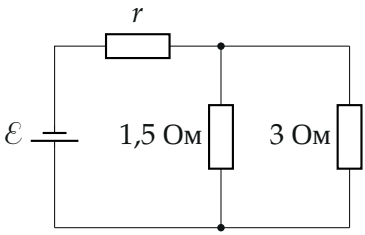
нужно параллельное. Для параллельного соединения $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$. Подходят два набора:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1\ \text{Ом}^{-1}, \qquad \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\ \text{Ом}^{-1}.$$

Мы перебрали на компьютере все наборы и все схемы из последовательных и параллельных соединений: ровно 1 Ом дают только эти два набора. Из всех четырёх резисторов ровно 1 Ом не собрать (ближайшее — $\frac{30}{31} \approx 0{,}97$ Ом).



Первый вариант: резисторы 2, 3 и 6 Ом параллельно, $R = 1$ Ом.



Второй вариант: резисторы 1,5 и 3 Ом параллельно, $R = 1$ Ом.

Обратите внимание. «Больше резисторов — больше мощность» неверно: мощность на внешней цепи зависит только от её общего сопротивления R, и лучше всего согласовать его с внутренним, $R = r$.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = \text{Вт}$. При $R = r$ ток $I = 0{,}5$ А, напряжение на внешней цепи $\mathcal{E} - Ir = 0{,}5$ В, мощность $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ Вт — то же. Для сравнения, при $R = 1{,}5$ Ом $P = \frac{1{,}5}{2{,}5^2} = 0{,}24$ Вт — меньше.

Смысл: при согласовании $R = r$ ровно половина мощности источника $\mathcal{E}I = 0{,}5$ Вт идёт во внешнюю цепь.

Ответ. Внешнее сопротивление должно равняться внутреннему, $R = r = 1$ Ом: резисторы 2, 3 и 6 Ом параллельно (или 1,5 и 3 Ом параллельно); $P_{\max} = \dfrac{I_0^2 r}{4} = 0{,}25$ Вт.