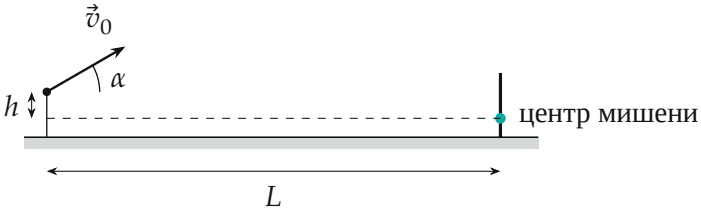
Стрельба из лука

Задача 1. [Курчатов 2021/22, 10 класс, задача 1] Вова участвует в соревнованиях по стрельбе из лука, где ему нужно поразить цель на расстоянии $L = 200$ м. Под каким углом α к горизонту Вова должен стрелять из лука, чтобы попасть точно в середину мишени? При натяжении лука работа Вовы равна $A = 500$ Дж, КПД лука $\eta = 0{,}17$. Масса стрелы $m = 54$ г. В момент выстрела стрела находится на $h = 70$ см выше центра мишени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: стрела вылетает на высоте h над центром мишени со скоростью v_0 под углом α к горизонту (масштаб по вертикали увеличен).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту. Сначала из закона сохранения энергии с учётом КПД находим скорость вылета стрелы. Потом стрела летит только под действием тяжести: по горизонтали — равномерно, по вертикали — равноускоренно. Требуем, чтобы через время t она оказалась в центре мишени, и исключаем время. Таких углов будет два — «настильный» и «навесной» выстрел.

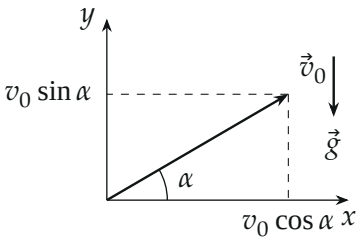
Обозначения. v_0 — скорость вылета; t — время полёта; оси: x — горизонтально к мишени, y — вертикально вверх, начало — точка вылета стрелы.

1. Скорость стрелы. КПД лука — доля работы Вовы, перешедшая в кинетическую энергию стрелы:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \eta A \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}17 \cdot 500}{0{,}054}}\ \text{м/с} \approx 56{,}1\ \text{м/с}.$$

2. Уравнения движения. Ускорение стрелы $\vec{a} = \vec{g}$ (сопротивления нет). Проекции скорости вылета (рисунок 2): $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Через время t стрела должна быть в центре мишени, т. е. в точке $x = L$, $y = -h$:

$$v_0 \cos\alpha \cdot t = L, \qquad v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$



Оси и проекции начальной скорости; ускорение стрелы — $\vec{g}$.

3. Исключаем угол. Из уравнений выразим $v_0 \cos\alpha = L/t$ и $v_0 \sin\alpha = (gt^2/2 - h)/t$; сумма квадратов равна v_0^2:

$$L^2 + \left(\frac{gt^2}{2} - h\right)^2 = v_0^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{g^2 t^4}{4} - (gh + v_0^2)t^2 + (h^2 + L^2) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно t^2; его дискриминант положителен, и оба корня положительны:

$$t^2 = \frac{2\left(gh + v_0^2 \pm \sqrt{(gh + v_0^2)^2 - g^2(h^2 + L^2)}\right)}{g^2},$$

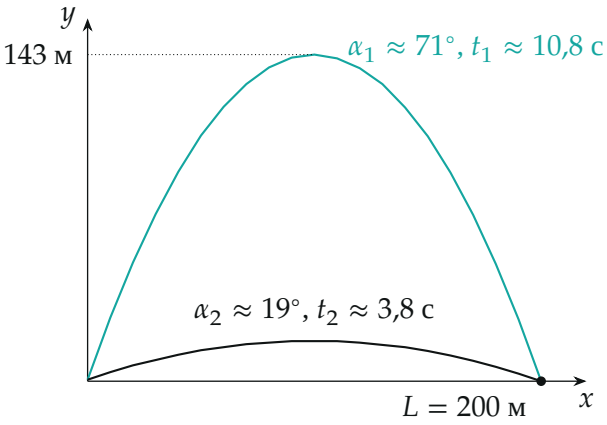
$$t_1 \approx 10{,}8 \text{ с}, \qquad t_2 \approx 3{,}77 \text{ с}.$$

4. Углы. Из горизонтального уравнения $\cos\alpha = \dfrac{L}{v_0 t}$:

$$\cos\alpha_1 = \frac{200}{56{,}1 \cdot 10{,}83} \approx 0{,}33 \quad (\alpha_1 \approx 71^\circ),$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{200}{56{,}1 \cdot 3{,}77} \approx 0{,}95 \quad (\alpha_2 \approx 19^\circ).$$

Обе траектории построены по точкам на рисунке 3.

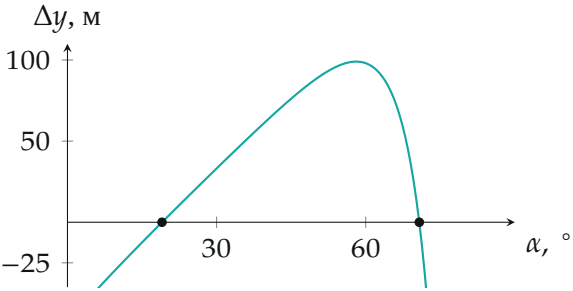


Две траектории стрелы в одном масштабе по осям (высота h на этом масштабе не видна): навесная (бирюзовая) и настильная (чёрная).

5. Почему углов два. Высота стрелы над центром мишени при $x = L$ как функция угла,

$$\Delta y(\alpha) = h + L\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

сначала растёт, потом падает (рисунок 4) и обращается в нуль дважды — при α_2 и α_1. Между ними стрела пролетает над мишенью, вне их — падает раньше.



Высота стрелы над центром мишени на расстоянии L в зависимости от угла выстрела; нули — искомые углы $19°$ и $71°$.

Обратите внимание. Оба корня t^2 физические: ответ — два угла, а не один. Высота h сдвигает углы меньше чем на градус; при $h = 0$ они были бы строго дополнительными до $90°$.

Проверка. Размерность: в уравнении для t^2 все слагаемые в м^2 (g^2t^4, $v_0^2t^2$, L^2). Подстановка: при α_2, t_2 высота $v_0 \sin\alpha_2\, t_2 - gt_2^2/2 = 56{,}1 \cdot 0{,}326 \cdot 3{,}77 - 4{,}9 \cdot 14{,}2 \approx -0{,}7$ м — ровно центр мишени. Сумма углов $70{,}8° + 19{,}0° \approx 90°$ — почти как при $h = 0$, когда дополнительные углы дают одинаковую дальность. Смысл: настильный выстрел быстрее (3,8 с против 10,8 с) и меньше зависит от ветра, поэтому лучник выберет его.

Ответ. $v_0 = \sqrt{2\eta A/m} \approx 56$ м/с; два угла: $\cos\alpha_1 \approx 0{,}33$ ($\alpha_1 \approx 71°$, полёт 10,8 с) и $\cos\alpha_2 \approx 0{,}95$ ($\alpha_2 \approx 19°$, полёт 3,8 с).