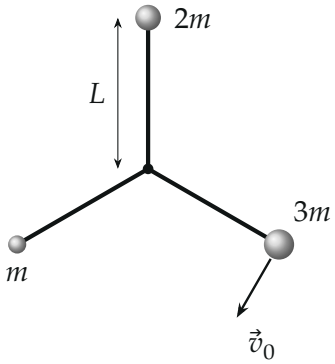
Три шарика на шарнирных стержнях

Задача 2. [Курчатов 2021/22, 10 класс, задача 2] На концах трёх жёстких невесомых стержней длиной $L = 12$ см каждый закреплены три одинаковых по размеру маленьких шарика массами m, $2m$ и $3m$, где $m = 110$ г. Противоположные концы стержней соединены между собой в одной точке, вокруг которой они могут свободно вращаться. Первоначально вся система неподвижно лежит на гладкой горизонтальной поверхности; все углы между соседними стержнями равны $2\pi/3$. Коротким ударом шарику массой $3m$ сообщают горизонтальную скорость $v_0 = 4$ м/с, направленную перпендикулярно соответствующему стержню. Найдите ускорения всех трёх шариков сразу после удара, считая их отличными от нуля.



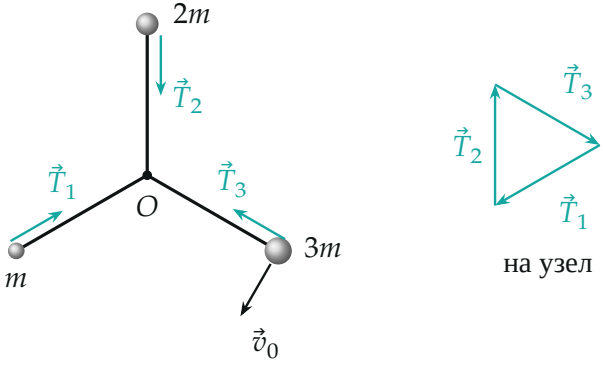
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связанные тела: сразу после удара скорость есть только у шарика $3m$, а ускорения шариков определяются натяжениями стержней. Невесомый узел даёт равенство натяжений, а нерастяжимость стержней — кинематическую связь: относительно узла шарик $3m$ начал двигаться по окружности радиуса L, и проекция его относительного ускорения на стержень — центростремительное v_0^2/L. Ключевые законы: второй закон Ньютона для каждого шарика и для невесомого узла.

Обозначения. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы от узла O вдоль стержней к шарикам m, $2m$, $3m$ (рисунок 2), $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$; T_i — силы натяжения; $\vec{a}_O$ — ускорение узла; $u = v_0^2/L$.

1. Узел сразу после удара покоится. Во время удара стержни могли бы передать ударные импульсы J_i вдоль себя. Узел невесом, поэтому их сумма равна нулю, а три вектора под углами 120° дают нуль только при равных модулях J. Шарики m и $2m$ получили бы скорости J/m и $J/2m$ вдоль своих стержней, и по нерастяжимости $v_O \cdot \vec{e}_i = -J/m_i$ для всех трёх; сумма этих равенств с $\sum \vec{e}_i = 0$ даёт $J(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}) = 0$, т. е. $J = 0$. Значит, после удара $v_O = 0$, шарики m и $2m$ стоят, шарик $3m$ движется со скоростью v_0 перпендикулярно стержню.

2. Натяжения равны. Второй закон Ньютона для невесомого узла: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$ (силы, с которыми стержни действуют на узел). Векторы идут вдоль стержней под углами 120° друг к другу, их сумма равна нулю только при равных модулях (замкнутый треугольник сил — равносторонний, рисунок 2):

$$T_1 = T_2 = T_3 = T.$$



Слева: силы натяжения стержней, действующие на шарики (к узлу), и скорость $\vec{v}_0$ после удара. Справа: силы, действующие на невесомый узел, — замкнутый равносторонний треугольник.

3. Второй закон Ньютона для шариков. По горизонтали на каждый шарик действует только натяжение своего стержня, направленное к узлу (тяжесть и реакция поверхности вертикальны и уравновешены):

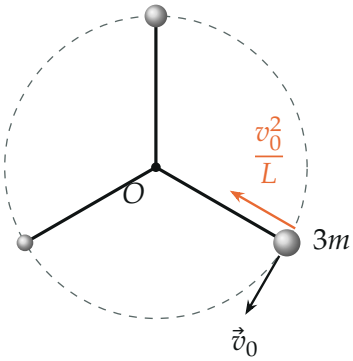
$$m_i\vec{a}_i = -T\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_i = -\frac{T}{m_i}\vec{e}_i.$$

Ускорение каждого шарика направлено вдоль своего стержня к узлу, по модулю $a_i = T/m_i$.

4. Связь: стержни нерастяжимы. Перейдём в систему отсчёта узла (рисунок 3). В ней каждый шарик движется по окружности радиуса L, и проекция его относительного ускорения на стержень (к центру) — центростремительное ускорение $v_{\text{отн}}^2/L$. У шариков m и $2m$ относительная скорость нулевая, у шарика $3m$ она равна v_0 (узел покоится). Проекция на $\vec{e}_i$:

$$(\vec{a}_i - \vec{a}_O)\cdot\vec{e}_i = -\frac{v_{i,\text{отн}}^2}{L}:$$

$$-\frac{T}{m} - \vec{a}_O\cdot\vec{e}_1 = 0, \qquad -\frac{T}{2m} - \vec{a}_O\cdot\vec{e}_2 = 0, \qquad -\frac{T}{3m} - \vec{a}_O\cdot\vec{e}_3 = -u.$$



В системе отсчёта узла шарик $3m$ начинает двигаться по окружности радиуса L: его относительное ускорение вдоль стержня равно v_0^2/L и направлено к O.

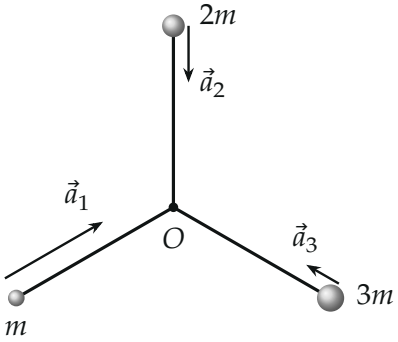
5. Решаем систему. Сложим три уравнения. Так как $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$, ускорение узла выпадает:

$$T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m}\right) = u \quad \Rightarrow \quad T = \frac{6}{11}\frac{mv_0^2}{L} = \frac{6}{11}\cdot\frac{0{,}11\cdot 16}{0{,}12}\ \text{Н} = 8{,}0\ \text{Н}.$$

Отсюда ускорения шариков $a_i = T/m_i$:

$$a_1 = \frac{6}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 73\ \text{м/с}^2, \quad a_2 = \frac{3}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 36\ \text{м/с}^2, \quad a_3 = \frac{2}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 24\ \text{м/с}^2,$$

каждое направлено вдоль своего стержня к узлу (рисунок 4). Числа: $v_0^2/L = 16/0{,}12 \approx 133\ \text{м/с}^2$.



Ускорения шариков сразу после удара в отношении 6 : 3 : 2 (длины стрелок — в масштабе).

Обратите внимание. Нельзя считать ускорение шарика $3m$ просто центростремительным v_0^2/L: узел сам ускоряется, и v_0^2/L — это ускорение шарика *относительно узла*. У организаторов в численном ответе ошибка в 10 раз: $a_1 \approx 7{,}3$, $a_2 \approx 3{,}6$, $a_3 \approx 2{,}4$ м/с; по их же формулам с $L = 0{,}12$ м получается 73, 36 и 24 м/с^2.

Проверка. Размерность: v_0^2/L — м^2/с^2/м = м/с^2. Предел: если массы m и $2m$ очень велики, узел почти неподвижен, $T \to 3m\,v_0^2/L$ и $a_3 \to v_0^2/L$ — обычное движение по окружности; наша формула $T = u/\sum(1/m_i)$ это даёт. Импульс системы: сумма сил на шарики $-T\sum \vec{e}_i = 0$, центр масс движется без ускорения, как и должно быть для системы без внешних горизонтальных сил. Смысл: лёгкий шарик получает наибольшее ускорение — натяжение у всех одно.

Ответ. $a_1 = \frac{6}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 73\ \text{м/с}^2$, $a_2 = \frac{3}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 36\ \text{м/с}^2$, $a_3 = \frac{2}{11}\frac{v_0^2}{L} \approx 24\ \text{м/с}^2$ (шарики m, $2m$, $3m$), все — вдоль стержней к точке соединения.