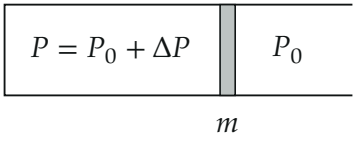
Поршень и нагреваемый газ в камере

Задача 3. [Курчатов 2021/22, 10 класс, задача 3] Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при постоянном давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен длинный горизонтальный цилиндр, левый торец которого закрыт, а правый открыт в камеру. В цилиндре может скользить без трения поршень массой $m = 1{,}2$ кг. Между поршнем и левым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ при давлении $P = P_0 + \Delta P$, где $\Delta P = 10$ Па. Поршень отпускают и начинают нагревать газ так, что его давление не меняется. К некоторому моменту времени к газу подвели количество теплоты $Q = 5$ Дж. Найдите скорость поршня v в этот момент. Числовой ответ выразите в см/с и округлите до целого значения. Процесс расширения газа считайте равновесным.

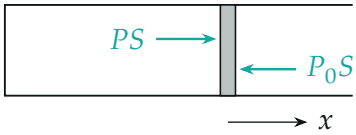


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики вместе со вторым законом Ньютона. Давление газа постоянно, поэтому на поршень действует постоянная результирующая сила $\Delta P\, S$ — он разгоняется равноускоренно. Теплота идёт на нагрев газа и на работу газа, а при изобарном процессе обе части выражаются через одно и то же произведение PSx. Связав x со скоростью по кинематике, получим v.

Обозначения. S — площадь поршня; x — его перемещение к рассматриваемому моменту; ν — количество газа; V_1, T_1 и V_2, T_2 — объём и температура газа в начале и в рассматриваемый момент; ось x — вправо вдоль цилиндра.

1. Второй закон Ньютона для поршня. По горизонтали на поршень действуют сила давления газа PS вправо и сила давления воздуха камеры P_0S влево (рисунок 2). В проекции на ось x:

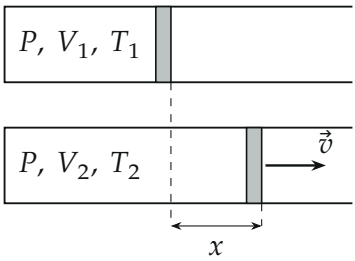
$$ma = PS - P_0S = \Delta P\, S \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\Delta P\, S}{m} = \text{const}.$$



Силы давления на поршень: газ толкает вправо, воздух камеры — влево; их разность $\Delta P\, S$ разгоняет поршень.

2. Кинематика. Поршень стартует из покоя с постоянным ускорением, поэтому (рисунок 3)

$$v^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2\,\Delta P\, S}.$$



Начальное состояние и рассматриваемый момент: поршень сместился на x и движется со скоростью v.

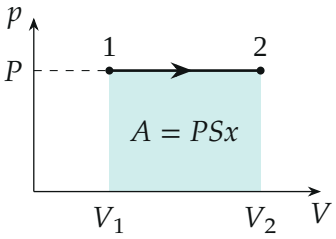
3. Первый закон термодинамики для газа. $Q = \Delta U + A$. Работа газа при постоянном давлении — площадь под изобарой (рисунок 4):

$$A = P(V_2 - V_1) = PSx.$$

Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$; по уравнению Менделеева — Клапейрона $\nu RT = PV$, поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}P(V_2 - V_1) = \frac{3}{2}PSx,$$

$$Q = \frac{5}{2}PSx = \frac{5}{2}(P_0 + \Delta P)Sx.$$



Изобарное расширение на pV-диаграмме; площадь под отрезком — работа газа.

4. Ответ. Подставим x из пункта 2:

$$Q = \frac{5}{2}(P_0 + \Delta P)S \cdot \frac{mv^2}{2\,\Delta P\,S} = \frac{5(P_0 + \Delta P)\,mv^2}{4\,\Delta P},$$

$$v = \sqrt{\frac{4Q\,\Delta P}{5m(P_0 + \Delta P)}}.$$

Числа: $v = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 5 \cdot 10}{5 \cdot 1{,}2 \cdot 1010}}$ м/с $\approx 0{,}182$ м/с ≈ 18 см/с. Площадь S сократилась — она и не дана.

Обратите внимание. Поршень разгоняет не всё давление газа P, а лишь избыток ΔP над давлением камеры; при этом работа газа PSx в сто раз больше кинетической энергии поршня: остальное ушло на работу против воздуха камеры P_0Sx.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж} \cdot \text{Па}}{\text{кг} \cdot \text{Па}} = \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$. Баланс энергии вторым способом: работа газа PSx = кинетическая энергия поршня $mv^2/2 = \Delta P\,Sx$ плюс работа против камеры P_0Sx — сходится. Доля: $\dfrac{mv^2/2}{Q} = \dfrac{2\Delta P}{5P} \approx 0{,}4\,\%$, т. е. $mv^2/2 \approx 0{,}02$ Дж — и $v = \sqrt{2 \cdot 0{,}0198/1{,}2} \approx 0{,}18$ м/с. Предел $\Delta P \to 0$: поршень не разгоняется, $v \to 0$.

Ответ. $v = \sqrt{\dfrac{4Q\,\Delta P}{5m(P_0 + \Delta P)}} \approx 18$ см/с.