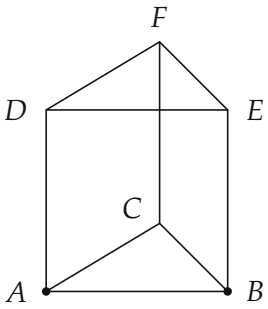
Правильная треугольная призма

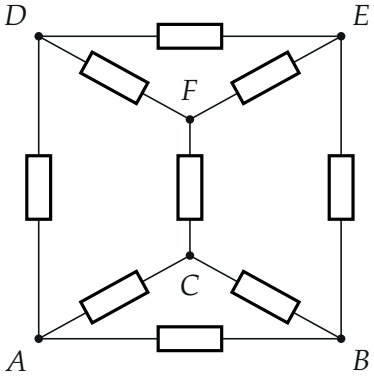
Задача 4. [Курчатов 2021/22, 10 класс, задача 4] Правильная треугольная призма, собранная из девяти одинаковых проволочных отрезков, подключена к источнику постоянного напряжения за точки A и B. Найдите отношение $x = P/P_{EF}$, где P — тепловая мощность, выделяющаяся на всей призме, а P_{EF} — тепловая мощность, выделяющаяся на отрезке EF.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на расчёт симметричной цепи. Призма симметрична относительно плоскости, проходящей через ребро CF и середину AB; при подключении к A и B точки C и F лежат на этой плоскости и имеют одинаковый потенциал. Поэтому ток по CF не течёт, отрезок можно убрать, и цепь становится последовательно-параллельной. Дальше — закон Ома и мощность U^2/R.

Обозначения. R — сопротивление одного отрезка; V — напряжение между A и B; $\varphi_A = V$, $\varphi_B = 0$ — потенциалы точек.

1. Плоская схема. Перерисуем призму на плоскости (рисунок 2): нижнее основание ABC, верхнее DEF, боковые рёбра AD, BE, CF.



Призма на плоскости: все девять отрезков одинаковые, сопротивлением R. Ось симметрии — вертикаль через C и F.

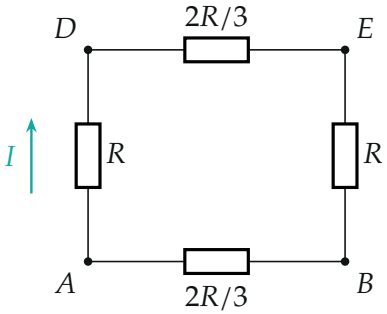
2. Ток по CF равен нулю. Схема зеркально симметрична относительно вертикали CF, а при отражении $A \leftrightarrow B$ потенциалы переходят в $\varphi \to V - \varphi$. Точка на оси переходит сама в себя, значит, $\varphi = V - \varphi$, $\varphi = V/2$ — и у C, и у F. Напряжение на CF нулевое, ток по закону Ома нулевой; отрезок CF убираем.

3. Упрощённая схема. Без CF путь $A \to C \to B$ ($2R$) параллелен отрезку AB (R), а путь $D \to F \to E$ ($2R$) параллелен DE (R). Каждый треугольник заменяется сопротивлением

$$R_\triangle = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R}{3}.$$

Получается кольцо из четырёх сопротивлений (рисунок 3): между A и B параллельно включены нижнее звено $2R/3$ и верхняя ветвь $A \to D \to E \to B$:

$$R_\text{в} = R + \frac{2R}{3} + R = \frac{8R}{3}.$$



После удаления CF треугольники заменены сопротивлениями $2R/3$; ток верхней ветви I.

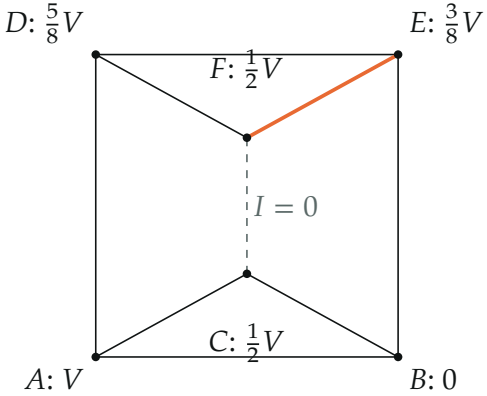
4. Мощность на EF**.** Ток верхней ветви по закону Ома $I = \dfrac{V}{8R/3} = \dfrac{3V}{8R}$; напряжение между D и E

$$V_{DE} = I \cdot \frac{2R}{3} = \frac{V}{4}.$$

Внутри треугольника DEF путь $D \to F \to E$ из двух одинаковых отрезков, напряжение делится пополам: $V_{EF} = V/8$. Мощность на отрезке

$$P_{EF} = \frac{V_{EF}^2}{R} = \frac{V^2}{64R}.$$

Потенциалы всех узлов (в долях V) — на рисунке 4.



Потенциалы узлов; на выделенном отрезке EF напряжение $\frac{1}{2}V - \frac{3}{8}V = \frac{1}{8}V$, по CF ток не течёт.

5. Мощность на всей призме. Сопротивление между A и B — параллельное соединение $8R/3$ и $2R/3$:

$$R_0 = \frac{(8R/3)(2R/3)}{8R/3 + 2R/3} = \frac{8R}{15}, \qquad P = \frac{V^2}{R_0} = \frac{15V^2}{8R}.$$

6. Отношение.

$$x = \frac{P}{P_{EF}} = \frac{15V^2}{8R} \cdot \frac{64R}{V^2} = 120.$$

Обратите внимание. C и F на оси симметрии — это не значит, что ток не течёт по AC или DF: нуль только на отрезке, оба конца которого лежат на оси.

Проверка. Второй способ — сумма мощностей по всем отрезкам с потенциалами рисунка 4 (в единицах V^2/R): AB: 1; AC, CB: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; AD, EB: $\frac{9}{64}+\frac{9}{64}$; DE: $\frac{4}{64}$; DF, FE: $\frac{1}{64}+\frac{1}{64}$; CF: 0. Сумма $= 1{,}5 + \frac{24}{64} = \frac{15}{8}$ — совпадает с P. Размерность: отношение мощностей безразмерно. Смысл: на «дальнем» отрезке EF выделяется меньше 1 % мощности — почти весь ток идёт напрямую по AB и через C.

Ответ. $x = 120$.