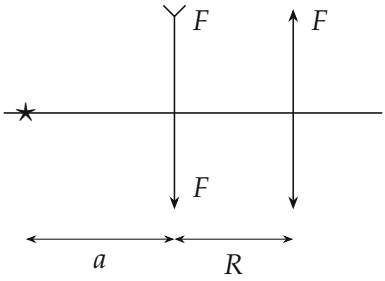
Составная линза и собирающая линза

Задача 5. [Курчатов 2021/22, 10 класс, задача 5] Оптическая система состоит из источника, находящегося на главной оптической оси, составной линзы и собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Оптические оси составной и собирающей линз совпадают. Верхняя половина составной линзы представляет собой половину рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F, нижняя половина — половину собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от объекта до составной линзы $a > F$. Расстояние между линзами равно R. Найдите расстояние от объекта до собирающей линзы, при условии что расстояние между линзами R — максимальное возможное расстояние, при котором система линз формирует два действительных изображения, находящихся на оптической оси. $F = 10$ см, $a = 30$ см.



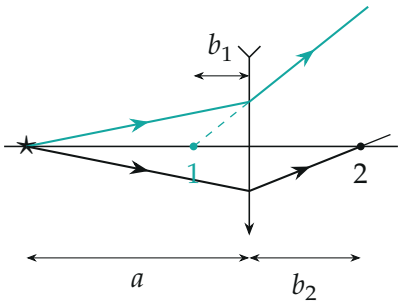
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на построение изображений в системе линз. Каждая половина составной линзы даёт своё изображение источника; затем собирающая линза строит изображения этих изображений. Действительное изображение на оси — это точка, где реально сходятся лучи. Будем двигать собирающую линзу вправо (увеличивать R) и считать, сколько таких точек есть при каждом R. Ключевой закон — формула тонкой линзы.

Обозначения. b_1 — расстояние от составной линзы до изображения 1, которое даёт рассеивающая половина; b_2 — до изображения 2 от собирающей половины; L_2 — собирающая линза; все расстояния в см.

1. Изображения от одной составной линзы. По формуле тонкой линзы (рисунок 2) рассеивающая половина даёт мнимое изображение 1 слева от линзы, собирающая — действительное изображение 2 справа:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b_1}=-\frac{1}{F}\ \Rightarrow\ b_1=\frac{aF}{a+F}=7{,}5\text{ см};$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{F}\ \Rightarrow\ b_2=\frac{aF}{a-F}=15\text{ см}.$$



Без второй линзы: лучи через верхнюю половину расходятся как из мнимой точки 1 ($b_1 = 7{,}5$ см), через нижнюю — сходятся в действительной точке 2 ($b_2 = 15$ см).

2. Пучок верхней половины. Для линзы L_2 он идёт из точки 1, расстояние до неё $R+b_1$. Формула линзы $\frac{1}{R+b_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ даёт действительное изображение ($f>0$), только если источник дальше фокуса:

$$R+b_1>F\quad\Rightarrow\quad R>R_1=F-\frac{aF}{a+F}=\frac{F^2}{a+F}=2{,}5\text{ см}.$$

При $R>R_1$ этот пучок даёт одно действительное изображение за L_2 — при любом большем R.

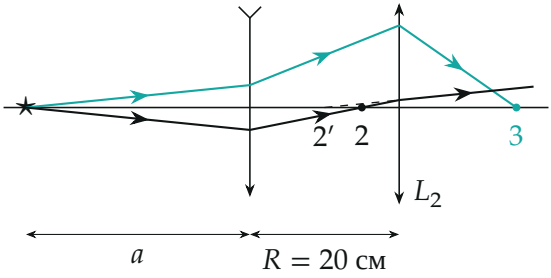
3. Пучок нижней половины. Здесь два случая.

- $R<b_2=15$ см: лучи падают на L_2, ещё не сойдясь (мнимый источник за линзой). Собирающая линза сводит сходящийся пучок ещё сильнее — одно действительное изображение за L_2.

- $R > b_2$: лучи сначала реально сходятся в точке 2 между линзами — это уже действительное изображение системы. Дальше точка 2 служит источником для L_2 на расстоянии $R - b_2$; второе действительное изображение (за L_2) появляется, только если $R - b_2 > F$:

$$R > R_2 = b_2 + F = \frac{2aF - F^2}{a - F} = 25 \text{ см}.$$

Случай $15 < R < 25$ показан на рисунке 3: точка 2 действительная, а её изображение в L_2 мнимое.



$R = 20$ см: действительные изображения — точка 2 (между линзами) и точка 3 (изображение мнимой точки 1 в L_2, 15,7 см за ней); изображение $2'$ точки 2 мнимое (пунктир). Лучи построены по формуле линзы.

4. Подсчёт изображений. Сведём всё на ось R (рисунок 4):

- $R < 2{,}5$ см: одно действительное (от нижней половины);
- $2{,}5 < R < 15$ см: два, оба за L_2;
- $15 < R < 25$ см: два — точка 2 и изображение от верхней половины;
- $R > 25$ см: три — добавилось изображение точки 2 в L_2.

Изображения разных пучков не сливаются: при $R > 25$ см обе точки за L_2 совпали бы, только если бы совпали их источники 1 и 2, а $b_2 \neq -b_1$.



Число действительных изображений на оси в зависимости от расстояния между линзами; два изображения — в бирюзовой полосе, её правый край $R_{\max} = 25$ см.

5. Ответ. Наибольшее R, при котором действительных изображений два:

$$R_{\max} = R_2 = \frac{2aF - F^2}{a - F} = \frac{600 - 100}{20} = 25 \text{ см}, \qquad a + R_{\max} = 55 \text{ см}.$$

Обратите внимание. При $R > b_2$ точка 2 — уже готовое действительное изображение системы, хотя лучи после неё ещё проходят через L_2; пропустить его — значит получить $R_{\max} = b_2 = 15$ см.

Проверка. Размерность: $\dfrac{aF}{a - F}$ и F — длины. Знак: $R_1 = 2{,}5$ см $< b_2 = 15$ см (в общем виде $b_2 - R_1 = \dfrac{F(a^2 + F^2)}{a^2 - F^2} > 0$), так что промежуток с двумя изображениями действительно существует. Граница $R = 25$ см: точка 2 в фокусе L_2, её изображение уходит на бесконечность — третье изображение рождается именно там. Смысл: чтобы третьего изображения не было, точка 2 не должна выходить за передний фокус собирающей линзы.

Ответ. $a + R_{\max} = a + \dfrac{2aF - F^2}{a - F} = 55$ см.