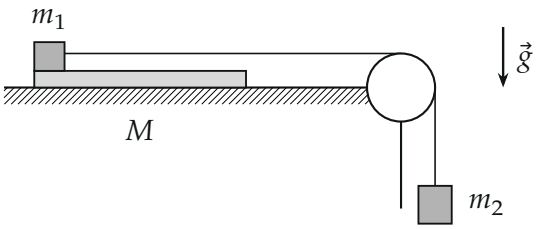
Брусок на доске с грузом на нити

Задача 1. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 1] На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 3$ кг и длиной $L = 0{,}8$ м. На краю доски стоит маленький брусок массой $m_1 = 0{,}15$ кг. К бруску привязана длинная невесомая нерастяжимая нить, переброшенная через гладкую трубу, закреплённую на краю стола. К вертикальному концу нити подвешивают груз массой $m_2 = 0{,}05$ кг и отпускают его без толчка. Найдите время τ, за которое брусок соскользнёт с доски. Коэффициент трения скольжения бруска по доске $\mu = 0{,}25$; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

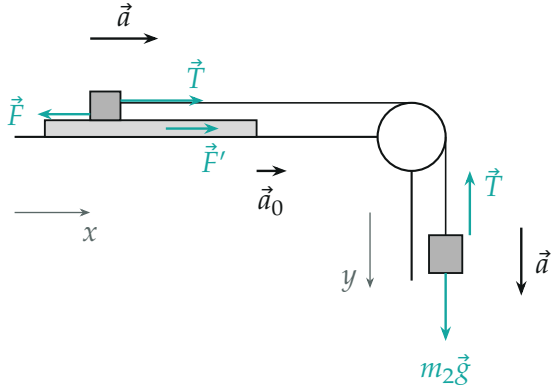


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение связанных тел с трением. Груз тянет через нить брусок, брусок скользит по доске, и сила трения скольжения тянет доску вперёд, в ту же сторону. Доска лежит на гладком столе, поэтому разгоняется только этой силой трения, и разгоняется слабее бруска. Брусок обгоняет доску; он соскользнёт, когда пройдёт относительно доски её длину L. Ключевые законы: второй закон Ньютона для каждого тела в системе отсчёта стола и формула пути при равноускоренном движении в системе отсчёта доски.

Обозначения. a — ускорение бруска (и груза, нить нерастяжима), a_0 — ускорение доски, T — сила натяжения нити, F — сила трения скольжения между бруском и доской, N — сила нормальной реакции доски на брусок. Ось x — горизонтально к трубе, ось y у груза — вертикально вниз (рисунок 2).

1. Проскальзывает ли брусок. Если бы брусок и доска ехали вместе, всё тело $m_1 + M$ и груз имели бы ускорение $\dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M} = 0{,}156$ м/с^2.

Доску разгоняет только трение, ей понадобилась бы сила $M \cdot 0{,}156 = 0{,}47$ Н, а трение покоя не больше $\mu m_1 g = 0{,}375$ Н. Не хватает — брусок скользит по доске, и сила трения равна силе трения скольжения: $F = \mu N = \mu m_1 g$ (по вертикали брусок не движется, $N = m_1 g$).



Горизонтальные силы: на брусок — натяжение $\vec{T}$ вперёд и трение $\vec{F}$ назад; на доску — трение $\vec{F}'$ ($F' = F$) вперёд. На груз — $\vec{T}$ вверх и $m_2\vec{g}$ вниз. Вертикальные силы бруска и доски уравновешены и не показаны.

2. Второй закон Ньютона для каждого тела. Система отсчёта — стол (инерциальная). Нить невесома и труба гладкая, поэтому натяжение одно и то же по всей нити. По третьему закону Ньютона брусок действует на доску силой трения $\vec{F}'$, равной по модулю F и направленной вперёд. Проекции:

$$\begin{aligned} \text{брусок, } x: &\quad m_1 a = T - \mu m_1 g, \\ \text{груз, } y: &\quad m_2 a = m_2 g - T, \\ \text{доска, } x: &\quad M a_0 = \mu m_1 g. \end{aligned}$$

3. Ускорения. Складываем первые два уравнения — натяжение сокращается:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{0{,}05 - 0{,}0375}{0{,}2} \cdot 10 = 0{,}625 \text{ м/с}^2,$$

$$a_0 = \frac{\mu m_1 g}{M} = \frac{0{,}375}{3} = 0{,}125 \text{ м/с}^2.$$

4. Движение относительно доски. Перейдём в систему отсчёта доски: в ней брусок стартует из покоя (вначале всё неподвижно) и движется с ускорением

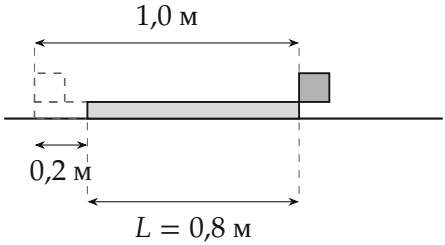
$$a' = a - a_0 = \frac{Mm_2 - \mu m_1(m_1 + m_2 + M)}{M(m_1 + m_2)} g = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение постоянно, путь относительно доски $\frac{a'\tau^2}{2}$; брусок соскальзывает, когда он равен L (рисунок 3):

$$L = \frac{a'\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2L}{a'}},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{g} \cdot \frac{M(m_1 + m_2)}{Mm_2 - \mu m_1(m_1 + m_2 + M)}},$$

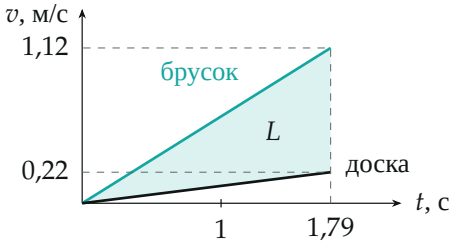
$$\tau = \sqrt{\frac{1{,}6}{0{,}5}} \text{ с} = 1{,}79 \text{ с}.$$



Положения в начале (пунктир) и в момент соскальзывания: за τ брусок прошёл по столу 1,0 м, доска — 0,2 м, разность — длина доски.

Обратите внимание. Сила трения тянет доску вперёд и разгоняет её, поэтому брусок проходит по столу больше L: считать путь L относительно стола (без движения доски) — ошибка, дающая $\tau = 1{,}6$ с.

Проверка. Размерность: $\sqrt{L/g}$ — секунды, вторая дробь безразмерна. Второй способ — по графику скоростей (рисунок 4): $v = at$ и $v_0 = a_0 t$; площадь между прямыми до τ равна $\dfrac{(a-a_0)\tau^2}{2} = \dfrac{0{,}5 \cdot 3{,}2}{2} = 0{,}8$ м $= L$. Пути по столу: $\dfrac{a\tau^2}{2} = 1{,}0$ м и $\dfrac{a_0\tau^2}{2} = 0{,}2$ м — разность 0,8 м. Предел: при $M \to \infty$ доска не движется, $a' \to a$ — брусок по неподвижной доске.



Скорости бруска и доски относительно стола; площадь между прямыми до $\tau = 1{,}79$ с — путь бруска относительно доски, $L = 0{,}8$ м.

Смысл: груз разгоняет брусок, но трение отдаёт часть силы доске, и брусок обгоняет её с ускорением всего 0,5 м/с^2 — поэтому соскальзывает почти за две секунды.

Ответ. $\tau = \sqrt{\dfrac{2L}{g} \cdot \dfrac{M(m_1+m_2)}{Mm_2 - \mu m_1(m_1+m_2+M)}} \approx 1{,}8$ с.