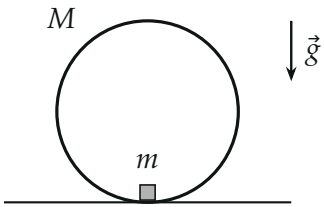
Малые колебания обруча с грузом

Задача 2. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 2] На горизонтальном столе стоит тонкий обруч массой $M = 50$ г и радиусом $R = 0{,}1$ м. Масса обруча равномерно распределена по его длине. К внутренней стороне обруча прикреплён точечный груз массой $m = 4$ г. В положении равновесия груз находится в самой нижней точке обруча. Найдите период T малых колебаний обруча около этого положения. Считайте, что обруч катается по столу без проскальзывания. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на малые колебания, решаемая через энергию. Обруч, катясь, поворачивается, груз поднимается над столом — его потенциальная энергия растёт, и сила тяжести груза возвращает систему к равновесию. Инертность даёт в основном сам обруч: он катится, и его кинетическая энергия MV^2 вдвое больше, чем у поступательно движущегося тела. Если записать полную энергию как $\frac{m_0\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, период равен периоду груза на пружине $2\pi\sqrt{m_0/k}$.

Обозначения. V — скорость центра обруча, x — смещение центра от положения равновесия, α — угол поворота обруча, u — скорость точек обруча относительно его центра.

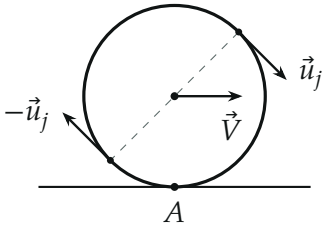
1. Кинетическая энергия катящегося обруча. Разобьём обруч на малые элементы Δm_j. Скорость элемента относительно стола $\vec{v}_j = \vec{V} + \vec{u}_j$, где $\vec{u}_j$ — скорость относительно центра: все элементы относительно центра движутся по окружности с одинаковой по модулю скоростью u (рисунок 2). Точка касания при качении без проскальзывания неподвиж-

на: $V - u = 0$, $u = V$. Энергия:

$$K = \sum_j \frac{\Delta m_j (\vec{V} + \vec{u}_j)^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \vec{V} \cdot \sum_j \Delta m_j \vec{u}_j + \frac{Mu^2}{2}.$$

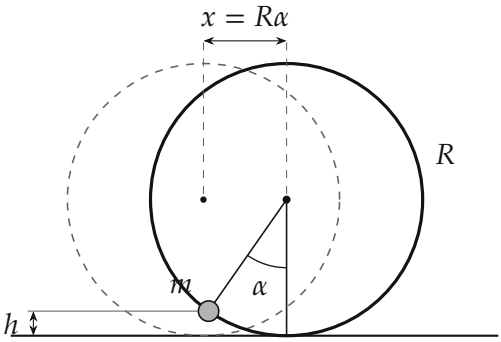
Средняя сумма равна нулю: у каждого элемента есть диаметрально противоположный с противоположной скоростью $-\vec{u}_j$ (рисунок 2), их вклады сокращаются. Значит,

$$K = \frac{MV^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = MV^2.$$



Скорости элементов относительно центра: модуль у всех u, у противоположных концов диаметра скорости противоположны. Точка касания A неподвижна, поэтому $u = V$.

2. Связь смещения и поворота. Без проскальзывания путь центра равен длине дуги обруча, прокатившейся по столу: $\Delta x = R\,\Delta\alpha$. В равновесии $x = 0$ и $\alpha = 0$, поэтому $x = R\alpha$ и $V = R\dot{\alpha}$ (рисунок 3).



Обруч прокатился на $x = R\alpha$ (пунктир — равновесие). Груз повернулся вместе с обручем на угол α и поднялся на $h = R(1 - \cos\alpha)$.

3. Потенциальная энергия. Груз закреплён на обруче и поворачивается вместе с ним на угол α вокруг центра, который остаётся на высоте R. Высота груза над столом $h = R(1 - \cos\alpha)$. При малых α: $1 - \cos\alpha \approx \dfrac{\alpha^2}{2}$, и

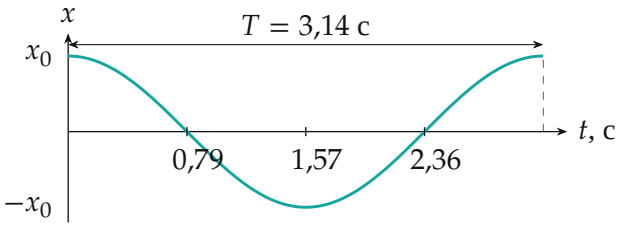
$$U = mgR(1 - \cos\alpha) \approx \frac{mgR\alpha^2}{2} = \frac{mg}{R} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

4. Полная энергия и аналогия с пружинным маятником. Кинетическая энергия груза мала: он находится у точки касания, его скорость порядка $V\alpha$ — второго порядка малости, а масса $m \ll M$. Полная энергия

$$E = MV^2 + \frac{mg}{R} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{(2M)\dot{x}^2}{2} + \frac{k_{эф}x^2}{2}, \qquad k_{эф} = \frac{mg}{R}.$$

Это энергия груза массой $m_0 = 2M$ на пружине жёсткостью $k_{эф}$; сохраняется (трение покоя в неподвижной точке касания работы не совершает), значит, движение — гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}1}{0{,}004 \cdot 10}}\ \text{с} = 2\pi \cdot 0{,}5\ \text{с} = 3{,}14\ \text{с}.$$



Смещение центра обруча $x(t) = x_0\cos(2\pi t/T)$ при малых колебаниях; период 3,14 с.

Обратите внимание. Инертная масса в «пружинной» аналогии — $2M$, а не M: половина кинетической энергии катящегося обруча — энергия вращения. Взять M — значит получить период в $\sqrt{2}$ раз меньше.

Проверка. Размерность: $\dfrac{MR}{mg}$ — кг·м/Н $= \text{с}^2$. Второй способ — уравнение движения из закона сохранения энергии: $\dfrac{dE}{dt} = 2M\dot{x}\ddot{x} + \dfrac{mg}{R}x\dot{x} = 0$, откуда $\ddot{x} = -\dfrac{mg}{2MR}\,x$, $\omega^2 = \dfrac{mg}{2MR} = \dfrac{0{,}04}{0{,}01} = 4\ \text{с}^{-2}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$ с. Предел: при $m \to 0$ возвращающей силы нет, $T \to \infty$ — лёгкий груз почти не держит обруч.

Смысл: лёгкий груз на тяжёлом обруче — «слабая пружина», а катящийся обруч — «удвоенная масса», поэтому колебания медленные, период около трёх секунд.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2MR}{mg}} \approx 3{,}14$ с.