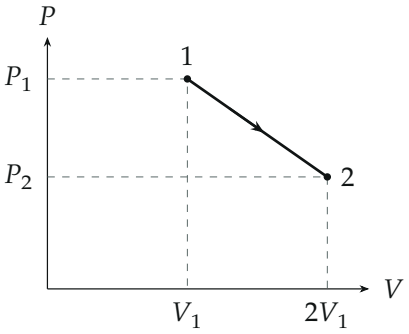
Газ, не отдающий тепло

Задача 3. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 3] Один моль идеального одноатомного газа переводят из начального состояния 1 с давлением P_1 и объёмом V_1 в конечное состояние 2 с давлением $P_2 < P_1$ и объёмом $2V_1$. На диаграмме P–V процесс перехода изображается прямолинейным отрезком, соединяющим точки 1 и 2. Найдите минимальное значение конечного давления P_2, при котором в рассматриваемом процессе газ не будет отдавать тепло.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики в процессе, где меняются и давление, и объём. Газ расширяется и совершает работу, а его температура $T \propto PV$ сначала растёт, но при сильном падении давления к концу отрезка может начать падать. Пока PV растёт быстро, газ получает тепло; если давление в конце слишком мало, на последнем участке газ охлаждается настолько, что отдаёт тепло. Найдём, при каком P_2 подведённое тепло Q растёт на всём отрезке — это и значит, что газ нигде не отдаёт тепло.

Обозначения. $\alpha = P_2/P_1$; P, V — давление и объём в промежуточном состоянии; $x = \dfrac{V - V_1}{V_1} \in [0;1]$ — безразмерный объём; $Q(x)$ — тепло, полученное газом на участке от состояния 1 до состояния x; ΔU — изменение внутренней энергии, A — работа газа на этом участке.

1. Уравнение отрезка. Давление линейно зависит от объёма:

$$P = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{V_1}(V - V_1) = P_1\,[1 - (1 - \alpha)x].$$

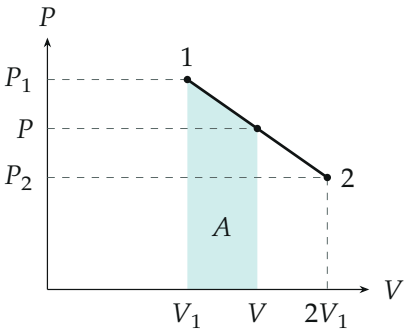
2. Изменение внутренней энергии. Для одного моля одноатомного газа $U = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}PV$ (уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = RT$). Подставляем P и $V = V_1(1 + x)$:

$$\Delta U = \frac{3}{2}(PV - P_1V_1) = \frac{3}{2}P_1V_1([1 - (1 - \alpha)x](1 + x) - 1),$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}P_1V_1\,x\,[\alpha - (1 - \alpha)x].$$

3. Работа газа — площадь трапеции под отрезком от V_1 до V (рисунок 2):

$$A = \frac{P + P_1}{2}(V - V_1) = \frac{1}{2}P_1V_1\,x\,[2 - (1 - \alpha)x].$$



Промежуточное состояние (V, P) на отрезке 1–2; работа газа от V_1 до V — площадь трапеции A.

4. Подведённое тепло. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$:

$$Q(x) = \frac{1}{2}P_1V_1\left[(3\alpha + 2)x - 4(1 - \alpha)x^2\right].$$

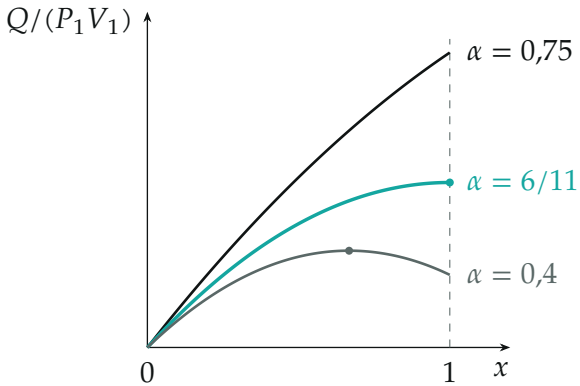
При $\alpha < 1$ это парабола ветвями вниз, $Q(0) = 0$; вершина — в точке

$$x_B = \frac{3\alpha + 2}{8(1-\alpha)}.$$

5. Условие «не отдаёт тепло». Газ получает тепло на участке, где $Q(x)$ растёт, и отдаёт там, где убывает. Слева от вершины парабола растёт, справа — убывает. Значит, газ нигде не отдаёт тепло, если весь отрезок $0 \le x \le 1$ лежит слева от вершины (рисунок 3):

$$x_B \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha + 2 \ge 8 - 8\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \ge \frac{6}{11}.$$

Наименьшее давление — при $\alpha = 6/11$: $P_2 = \frac{6}{11} P_1$; тогда вершина параболы как раз в конце отрезка, $x_B = 1$.



Тепло $Q(x)$, полученное газом, при трёх значениях α. При $\alpha = 0{,}4$ максимум внутри отрезка, при $x > 2/3$ газ отдаёт тепло; при $\alpha = 6/11$ максимум ровно в конце отрезка.

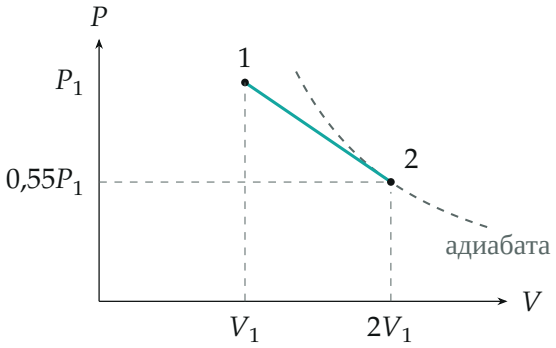
Обратите внимание. Условие $Q(1) \ge 0$ (суммарно газ получил тепло) недостаточно: при $\alpha = 0{,}4$ итог $Q(1) = 0{,}4 P_1 V_1 > 0$, но на последней трети пути газ тепло отдаёт. Нужно, чтобы Q не убывала нигде.

Проверка. *Второй способ — через адиабату.* На малом шаге $\delta Q = \frac{5}{2} P\,\delta V + \frac{3}{2} V\,\delta P$; $\delta Q = 0$ там, где наклон отрезка совпадает с наклоном

адиабаты $\dfrac{\delta P}{\delta V} = -\dfrac{5P}{3V}$. Вдоль отрезка $\delta Q/\delta V$ убывает, поэтому крайняя точка без отдачи тепла — конец 2: отрезок касается адиабаты в точке 2 (рисунок 4):

$$-\frac{P_1 - P_2}{V_1} = -\frac{5P_2}{3 \cdot 2V_1} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{11}{6}P_2, \qquad P_2 = \frac{6}{11}P_1.$$

Ответ тот же. Размерность: α безразмерна, Q в единицах P_1V_1 — энергия.



При $P_2 = \frac{6}{11}P_1$ отрезок 1–2 касается адиабаты (пунктир) в точке 2: до неё газ получает тепло, а дальше по прямой начал бы отдавать.

Смысл: если давление в конце упадёт ниже $\frac{6}{11}P_1$, газ на последнем участке будет расширяться «круче адиабаты» и отдавать тепло.

Ответ. $P_{2\,\min} = \dfrac{6}{11}P_1 \approx 0{,}55P_1$.