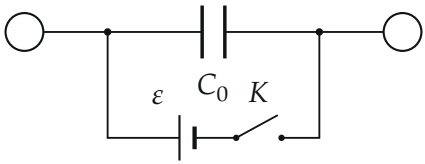
Конденсатор с шариками на проводах

Задача 4. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 4] При помощи длинных тонких проводов обкладки плоского конденсатора ёмкостью $C_0 = 3{,}5$ пФ присоединены к двум одинаковым металлическим шарикам радиуса $R = 2{,}7$ см (каждая обкладка присоединена к одному шарику). Вся система подключена к батарее с ЭДС $\varepsilon = 12$ В через ключ K. Сначала ключ разомкнут, конденсатор и шарики не заряжены. Найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи после замыкания ключа. Считайте, что $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.



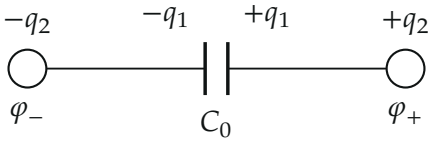
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на энергию заряжаемого конденсатора. Обкладки вместе с шариками образуют два проводника — это «сложный конденсатор»: заряд садится и на пластины, и на шарики. Его ёмкость C больше C_0 на ёмкость пары шариков. После замыкания ключа батарея проталкивает заряд $q = C\varepsilon$ и совершает работу $q\varepsilon$, а в конденсаторе запасается только половина этой работы; вторая половина выделяется теплом в проводах — при любом их сопротивлении.

Обозначения. q — заряд каждого из двух проводников (обкладка + шарик); q_1 — заряд пластины плоского конденсатора, q_2 — заряд шарика; φ_+, φ_- — потенциалы проводников; $U = \varphi_+ - \varphi_-$ — напряжение; C — ёмкость сложного конденсатора.

1. Ёмкость сложного конденсатора. Мысленно сообщим проводникам заряды $\pm q$ (рисунок 2). Каждый проводник — пластина, провод и шарик — имеет во всех точках один потенциал. Заряд проводника делится между пластиной и шариком (заряд тонких проводов не учитываем):

$$q = q_1 + q_2.$$

На пластинах плоского конденсатора напряжение U, поэтому $q_1 = C_0U$.



Заряды сложного конденсатора: проводник «пластина + шарик» слева несёт $-q = -(q_1 + q_2)$, справа — $+q$; потенциалы проводников φ_- и φ_+.

2. Потенциал шарика. Шарики далеко друг от друга и от пластин, поэтому потенциал шарика создаёт только его собственный заряд — как у уединённой сферы:

$$\varphi_\pm = \pm\frac{kq_2}{R} \quad \Rightarrow \quad U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{2kq_2}{R} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{UR}{2k}.$$

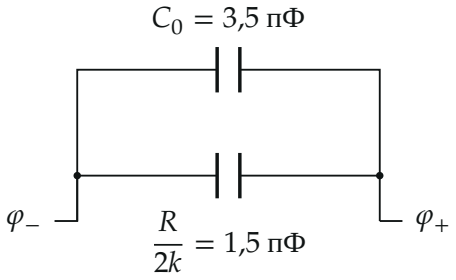
Потенциалы $\pm$ симметричны: шарики одинаковые и несут заряды $\pm q_2$, а бесконечность (нулевой потенциал) — посередине по симметрии.

3. Ёмкость. Складываем заряды:

$$q = C_0U + \frac{UR}{2k} = \left(C_0 + \frac{R}{2k}\right)U \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = C_0 + \frac{R}{2k}.$$

Это параллельное соединение плоского конденсатора и «конденсатора из двух шариков» (рисунок 3). Числа:

$$\frac{R}{2k} = \frac{0{,}027}{2 \cdot 9 \cdot 10^9}\ \text{Ф} = 1{,}5\ \text{пФ}, \qquad C = 3{,}5 + 1{,}5 = 5{,}0\ \text{пФ}.$$



Эквивалентная схема: плоский конденсатор C_0 и пара шариков $R/(2k)$ соединены параллельно, общая ёмкость $C = 5$ пФ.

4. Баланс энергии. После замыкания ключа ток идёт, пока напряжение на конденсаторе не станет ε; заряд $q = C\varepsilon$. Через батарею прошёл заряд q в направлении её ЭДС, работа батареи и энергия конденсатора:

$$A = q\varepsilon = C\varepsilon^2, \qquad W = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии: работа батареи идёт на энергию конденсатора и тепло (рисунок 4):

$$Q = A - W = \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\left(C_0 + \frac{R}{2k}\right)\varepsilon^2,$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-12} \cdot 144 \text{ Дж} = 3{,}6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 0{,}36 \text{ нДж}.$$

$A = C\varepsilon^2 = 0{,}72$ нДж	
$W = 0{,}36$ нДж	$Q = 0{,}36$ нДж

Работа батареи делится пополам: половина — энергия заряженного конденсатора W, половина — тепло Q.

Обратите внимание. Шарики — не «подставки» для проводов: они сами набирают заметный заряд. Их ёмкость 1,5 пФ сравнима с C_0; без них получилось бы $Q = 0{,}25$ нДж.

Проверка. Размерность: R/k — м/(м/Ф) = Ф; $C\varepsilon^2$ — Ф·В^2 = Кл·В = Дж. Предел: при $R \to 0$ шарики заряда не берут, $Q \to \dfrac{C_0\varepsilon^2}{2}$ — обычный конденсатор. Второй способ для половины: при зарядке ток течёт через сопротивление r, $I = \dfrac{\varepsilon}{r}e^{-t/rC}$, тепло $\displaystyle\int_0^\infty I^2 r\,dt = \frac{\varepsilon^2}{r}\cdot\frac{rC}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2}$ — не зависит от r.

Смысл: при зарядке от батареи в тепло всегда уходит половина её работы, а ёмкость системы складывается из ёмкости пластин и ёмкости шариков.

Ответ. $Q = \dfrac{1}{2}\left(C_0 + \dfrac{R}{2k}\right)\varepsilon^2 = 0{,}36$ нДж.