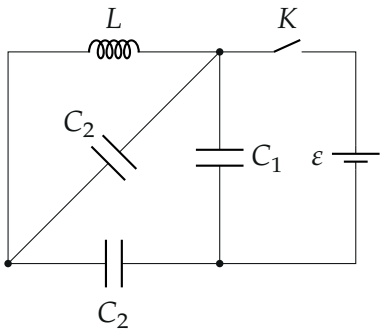
Катушка и конденсаторы с батареей

Задача 5. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 5] Электрическая цепь состоит из ключа K, катушки индуктивностью $L = 64$ мкГн, одного конденсатора ёмкостью $C_1 = 0{,}4$ нФ, двух конденсаторов ёмкостью $C_2 = 1{,}2$ нФ и батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Сначала ключ разомкнут и конденсаторы не заряжены. Пренебрегая излучением и сопротивлением всех элементов цепи, найдите максимальное значение I_m тока в катушке после замыкания ключа.

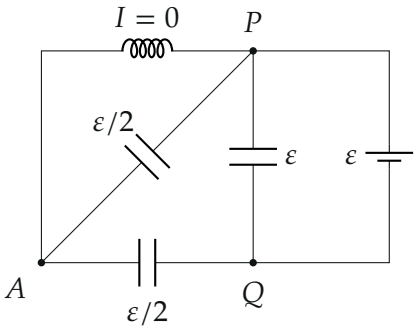


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на колебательный контур с батареей. Сопротивления нет, поэтому сразу после замыкания конденсаторы, к которым батарея подключена без катушки, мгновенно заряжаются, а ток через катушку ещё равен нулю — катушка не даёт току измениться скачком. Дальше ток в катушке нарастает, перезаряжая конденсаторы. Ток максимален, когда он перестаёт меняться, то есть когда ЭДС самоиндукции, а значит, и напряжение на катушке равны нулю. Энергию катушки в этот момент даст баланс энергии: работа батареи равна изменению энергии конденсаторов плюс энергия катушки.

Обозначения. Узлы: P — верхний (катушка, C_1, ключ), Q — нижний (C_1, батарея), A — левый нижний угол; диагональный конденсатор C_2 включён между A и P, то есть параллельно катушке; нижний C_2 — между A и Q (рисунок 2). q_1, q_2 — заряды C_1 и нижнего C_2 сразу после замыкания, q_2' — заряд нижнего C_2 при максимальном токе; Δq — заряд, прошедший через батарею.

1. Сразу после замыкания. Ток через катушку равен нулю. Батарея подключена к C_1 напрямую: $U_{C_1} = \varepsilon$. Ветвь P–A–Q без тока катушки — это диагональный и нижний C_2 последовательно; одинаковые конденсаторы делят напряжение поровну:

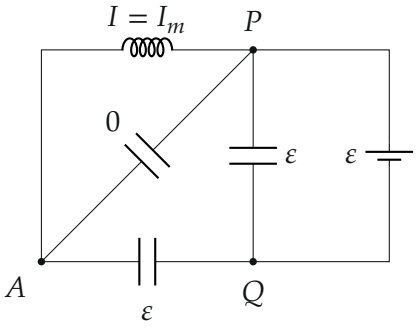
$$q_1 = C_1\varepsilon, \qquad q_2 = \frac{C_2\varepsilon}{2}, \qquad U_{\text{диаг}} = U_{\text{ниж}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Сразу после замыкания: ток катушки нулевой, на C_1 напряжение ε, на каждом C_2 — $\varepsilon/2$.

2. Момент максимального тока. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$; при максимуме $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 0$, напряжение на катушке нулевое. Диагональный C_2 параллелен катушке — он разряжен. По правилу Кирхгофа для контура P–A–Q всё напряжение батареи теперь на нижнем C_2, а C_1 по-прежнему под напряжением ε:

$$q_1' = q_1 = C_1\varepsilon, \qquad q_2' = C_2\varepsilon.$$



При максимальном токе: напряжение на катушке и на параллельном ей диагональном C_2 равно нулю, на нижнем C_2 и на C_1 — ε.

3. Работа батареи. Заряд C_1 не изменился, поэтому заряд, прошедший через батарею, равен приросту заряда нижнего C_2 (его обкладка, соединённая с узлом Q, связана с батареей):

$$\Delta q = q_2' - q_2 = \frac{C_2\varepsilon}{2}, \qquad A_б = \Delta q\,\varepsilon = \frac{C_2\varepsilon^2}{2}.$$

4. Энергия конденсаторов. До и после:

$$W_1 = \frac{C_1\varepsilon^2}{2} + 2\cdot\frac{C_2(\varepsilon/2)^2}{2} = \frac{C_1\varepsilon^2}{2} + \frac{C_2\varepsilon^2}{4},$$

$$W_2 = \frac{C_1\varepsilon^2}{2} + \frac{C_2\varepsilon^2}{2}, \qquad \Delta W = \frac{C_2\varepsilon^2}{4}.$$

5. Баланс энергии. Сопротивления и излучения нет, работа батареи идёт на энергию конденсаторов и катушки:

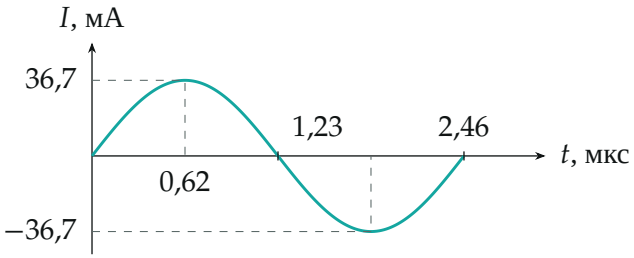
$$A_б = \Delta W + \frac{LI_m^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{LI_m^2}{2} = \frac{C_2\varepsilon^2}{2} - \frac{C_2\varepsilon^2}{4} = \frac{C_2\varepsilon^2}{4},$$

$$I_m = \varepsilon\sqrt{\frac{C_2}{2L}} = 12\cdot\sqrt{\frac{1{,}2\cdot10^{-9}}{2\cdot64\cdot10^{-6}}}\ \text{А} = 3{,}67\cdot10^{-2}\ \text{А} = 36{,}7\ \text{мА}.$$

Ответ не зависит от C_1: этот конденсатор заряжается мгновенно и дальше не участвует.

Обратите внимание. Мгновенная зарядка в начале идёт с потерей энергии (в реальных проводах — тепло, в идеальной цепи — излучение); поэтому баланс энергии записываем не от момента замыкания, а от состояния сразу после него, когда ток катушки ещё нулевой.

Проверка. *Второй способ — колебательный контур.* Для переменной части тока батарея — просто провод, и катушка замкнута на два параллельных конденсатора C_2 (диагональный и нижний через батарею), ёмкость контура $2C_2$. Напряжение на катушке колеблется около нуля с начальной амплитудой $\varepsilon/2$; энергия колебаний $\dfrac{2C_2(\varepsilon/2)^2}{2} = \dfrac{C_2\varepsilon^2}{4}$ переходит в $\dfrac{LI_m^2}{2}$ — тот же ответ. Период $T = 2\pi\sqrt{2LC_2} = 2{,}46$ мкс, ток $I = I_m \sin(2\pi t/T)$ (рисунок 4). Размерность: $\sqrt{C/L}$ — $\sqrt{\text{Ф/Гн}} = 1/\text{Ом}$, $\varepsilon\sqrt{C/L}$ — ампер.



Ток в катушке после замыкания: колебания с амплитудой $I_m = 36{,}7$ мА и периодом 2,46 мкс; первый максимум — через четверть периода.

Смысл: батарея «досылает» заряд $C_2\varepsilon/2$, половина её работы идёт в конденсаторы, половина — в магнитное поле катушки.

Ответ. $I_m = \varepsilon\sqrt{\dfrac{C_2}{2L}} \approx 36{,}7$ мА.