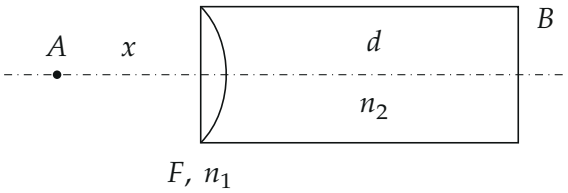
Линза в цилиндре с жидкостью

Задача 6. [Курчатов 2021/22, 11 класс, задача 6] Левый торец кругового цилиндра закрыт тонкой плосковыпуклой стеклянной линзой, обращённой выпуклой стороной внутрь цилиндра. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью цилиндра, фокусное расстояние линзы в воздухе $F = 12$ см, показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}8$. Правый торец цилиндра закрыт экраном B, изготовленным из тонкого матового стекла. Расстояние от линзы до экрана $d = 50$ см. Внутри цилиндр заполнен жидкостью с показателем преломления $n_2 = 1{,}4$. Слева от линзы, на её оптической оси, находится точечный источник света A, изображение которого получено на матовом экране. Найдите расстояние x от источника света до линзы.

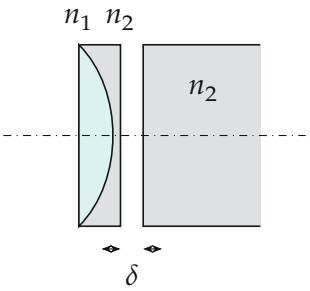


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тонкую линзу, у которой с разных сторон разные среды. Источник A и экран C должны быть сопряжёнными точками системы «линза + жидкость». Главная идея (как у организаторов): мысленно отделим жидкость от линзы тонким воздушным зазором. Тогда задача распадается на две знакомые части: линза в воздухе (стеклянная линза вплотную к «жидкой» рассеивающей) и преломление на плоской границе воздух — жидкость.

Обозначения. R — радиус выпуклой поверхности линзы; F' — фокусное расстояние составной линзы «стекло + слой жидкости» в воздухе; h — высота, на которой луч проходит линзу; f — расстояние от линзы до точки 1, где луч пересёк бы ось без жидкости; C — точка экрана на оси.

1. Мысленный разрез. Проведём через вершину выпуклой поверхности плоскость, перпендикулярную оси, и раздвинем стекло и жидкость

на тонкий воздушный зазор $\delta \to 0$ (рисунок 2). Получились две соприкасающиеся тонкие линзы в воздухе: исходная стеклянная плосковыпуклая (фокус F) и плосковогнутая «линза» из жидкости с тем же радиусом R.



Мысленный разрез: стеклянная линза, тонкая плосковогнутая «линза» из жидкости и плоская граница воздух — жидкость за зазором $\delta \to 0$.

2. Оптическая сила составной линзы. По формуле линзы в воздухе оптическая сила плосковыпуклой стеклянной линзы и плосковогнутой жидкой:

$$\frac{1}{F} = \frac{n_1 - 1}{R}, \qquad D_{\text{ж}} = -\frac{n_2 - 1}{R}.$$

Оптические силы тонких соприкасающихся линз складываются:

$$\frac{1}{F'} = \frac{n_1 - 1}{R} - \frac{n_2 - 1}{R} = \frac{n_1 - n_2}{R} = \frac{n_1 - n_2}{(n_1 - 1)F},$$

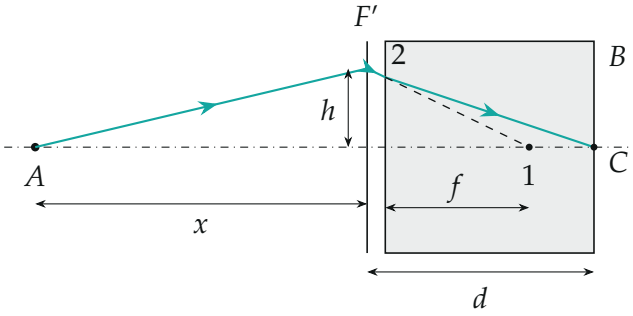
$$F' = \frac{(n_1 - 1)F}{n_1 - n_2} = \frac{0{,}8 \cdot 12}{0{,}4} = 24 \text{ см}.$$

$F' > 0$: составная линза собирающая (стекло преломляет сильнее, чем жидкость).

3. Ход луча. Возьмём луч из A под малым углом к оси (рисунок 3). Без жидкости после составной линзы он пересёк бы ось в точке 1 на расстоянии f, по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F'}.$$

На плоской границе (точка 2) луч переходит из воздуха в жидкость и идёт к оси круче: он должен попасть в ту же точку C экрана, что и осевой луч, — тогда C и есть изображение A.

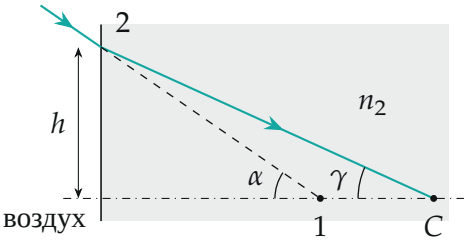


Луч из A: составная линза направляет его в точку 1 (пунктир — ход без жидкости); на плоской границе в точке 2 луч преломляется и приходит в точку C экрана. Масштаб по вертикали увеличен.

4. Преломление на плоской границе. Закон преломления в точке 2 для малых углов (рисунок 4): $\sin\alpha = n_2 \sin\gamma$, т. е. $\alpha \approx n_2\gamma$. Углы с осью найдём по высоте h точки 2 (при $\delta \to 0$ она та же, что на линзе):

$$\alpha \approx \frac{h}{f}, \qquad \gamma \approx \frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{f} = n_2\frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{n_2}{d}.$$

Высота h сократилась — все параксиальные лучи сходятся в одну точку C: изображение резкое.



Плоская граница: угол α луча с осью в воздухе и угол γ в жидкости (накрест лежащие с углами при оси); $\alpha \approx h/f$, $\gamma \approx h/d$.

5. Ответ. Подставим $1/f = n_2/d$ и F' в формулу линзы, $\delta = 0$:

$$\frac{1}{x} = \frac{n_1 - n_2}{(n_1 - 1)F} - \frac{n_2}{d} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(n_1 - 1)Fd}{(n_1 - n_2)d - n_2(n_1 - 1)F},$$

$$x = \frac{0{,}8 \cdot 12 \cdot 50}{0{,}4 \cdot 50 - 1{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 12} \text{ см} \approx 73 \text{ см}.$$

Обратите внимание. Нельзя считать фокус «в жидкости» тем же F или F': за линзой жидкость, и луч в ней идёт к оси под меньшим углом, поэтому точка C дальше точки 1 в n_2 раз: $d = n_2 f$.

Проверка. Второй способ — преломление на одной сферической поверхности стекло — жидкость (плоская сторона в воздухе лучей не отклоняет): $\frac{1}{x} + \frac{n_2}{d} = \frac{n_1 - n_2}{R}$, где $\frac{1}{R} = \frac{1}{(n_1 - 1)F}$, — то же уравнение. Предел $n_2 \to 1$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ — обычная линза в воздухе. Знак: знаменатель $20 - 13{,}4 > 0$, источник действительный, слева от линзы. Смысл: жидкость ослабляет линзу и «отодвигает» изображение, поэтому источник приходится ставить дальше, чем $Fd/(d - F) \approx 16$ см для пустого цилиндра.

Ответ. $x = \dfrac{(n_1 - 1)Fd}{(n_1 - n_2)d - n_2(n_1 - 1)F} \approx 73$ см.