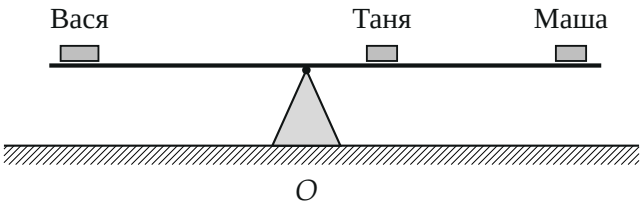
Несимметричные качели

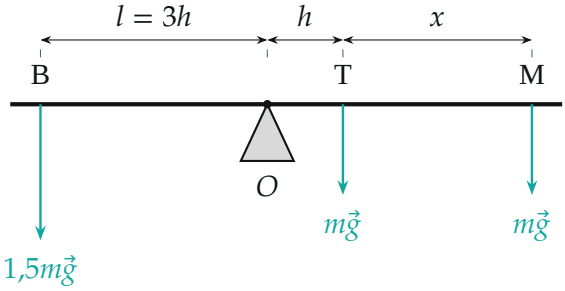
Задача 1. [Курчатов 2021/22, 7 класс, задача 1] На детской площадке стоят несимметричные качели-балансир. Про качели известно, что они представляют из себя рычаг, у которого точка опоры не обязательно находится посередине и у которого на одном плече установлены два сидения, а на другом — одно. Вася, Маша и Таня пришли на них кататься. Известно, что Таня и Маша весят одинаково, а Вася в полтора раза тяжелее Маши. Дети заметили, что если девочки займут сидения с одной стороны качелей относительно точки опоры, а Вася — с другой, то наступит равновесие. Пусть Таня сидит ближе к точке опоры качелей, чем Маша. Тогда Вася сидит в три раза дальше от точки опоры, чем Таня. Найдите отношение расстояния от Тани до Маши к расстоянию от Тани до точки опоры.



Поясняющий рисунок: качели-балансир с точкой опоры O; Вася с одной стороны, Таня и Маша — с другой.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие рычага. Качели неподвижны, значит, моменты сил тяжести детей относительно точки опоры уравновешивают друг друга: момент веса Васи равен сумме моментов весов девочек. Неизвестных расстояний два, но в ответ входит только их отношение, поэтому все расстояния удобно мерить в долях расстояния от опоры до Тани.

Обозначения. m — масса Маши (и Тани), $1{,}5m$ — масса Васи; h — расстояние от точки опоры O до Тани, x — от Тани до Маши, $l = 3h$ — от O до Васи (рисунок 2). Искомое — x/h.



Силы тяжести детей и их плечи относительно точки опоры O. Плечо силы Маши — $h + x$.

1. Плечи сил. Каждая сила тяжести направлена вертикально вниз, доска горизонтальна, поэтому плечо силы — расстояние по доске от O до ребёнка: у Васи $l = 3h$, у Тани h, у Маши $h + x$.

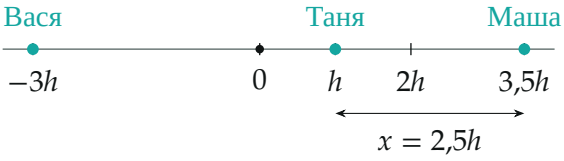
2. Правило моментов. Качели неподвижны, сумма моментов сил относительно оси качелей равна нулю. Вес Васи поворачивает доску в одну сторону, веса девочек — в другую:

$$1{,}5mg \cdot l = mg \cdot h + mg\,(h + x).$$

Сила реакции опоры приложена в O, её плечо равно нулю — в уравнение она не входит; для этого ось и выбрана в точке опоры.

3. Отношение. Сокращаем mg и подставляем $l = 3h$:

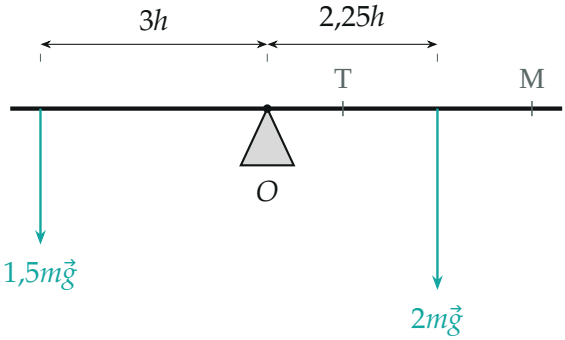
$$1{,}5 \cdot 3h = 2h + x \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}5h - 2h = 2{,}5h, \qquad \frac{x}{h} = 2{,}5.$$



Положения детей на доске в единицах h: Маша сидит на $3{,}5h$ от опоры, от Тани до неё $2{,}5h$.

Обратите внимание. В правило моментов входит плечо Маши $h + x$ от точки опоры, а не искомое расстояние x от Тани. Перепутать их — значит получить $x/h = 3{,}5$.

Проверка. *Второй способ — через центр тяжести девочек.* Две одинаковые девочки действуют на доску как одна сила $2mg$, приложенная посередине между ними, на расстоянии $\dfrac{h + (h + x)}{2} = 2{,}25h$ от опоры (рисунок 4). Моменты: $1{,}5mg \cdot 3h = 4{,}5\,mgh$ и $2mg \cdot 2{,}25h = 4{,}5\,mgh$ — равны, ответ верен.



Девочек можно заменить одной силой $2m\vec{g}$ в середине между ними: $1{,}5 \cdot 3 = 2 \cdot 2{,}25$.

Размерность: x/h — отношение длин, безразмерно. Знак: $x > 0$, Маша действительно дальше Тани, как сказано в условии. Если бы Вася сидел ближе ($l = 4h/3$), получилось бы $x = 0$ — девочки на одном месте; при меньших l равновесия с Машей дальше Тани нет.

Смысл: тяжёлый Вася на длинном плече уравновешивает двух девочек, и Маше приходится сесть далеко, на $3{,}5h$ от опоры.

Ответ. $\dfrac{x}{h} = 2{,}5$.