Муравей и слон на блоках

Задача 2. [Курчатов 2021/22, 7 класс, задача 2] Маленький муравей вертикально тянет веревку с силой 1 Н. Веревка перекинута через неподвижный блок, прикрепленный к потолку, и через подвижный блок соединена с потолком. К центру этого подвижного блока также прикреплена веревка, которая соединена с потолком через другой подвижный блок. Так цепочка подвижных блоков продолжается несколько раз, а к последнему блоку привязана веревка, за которую схватился слон. Слон тянет конец веревки с силой 5000 Н, также вертикально. Найдите наименьшее необходимое количество подвижных блоков для того, чтобы муравей смог перетянуть веревку на свою сторону. Блоки считать невесомыми, а веревку — нерастяжимой.

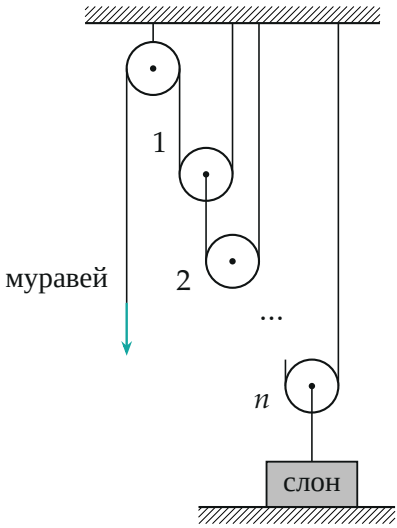


Схема по рисунку условия: неподвижный блок у потолка, цепочка подвижных блоков $1, 2, \ldots, n$, к последнему привязана веревка слона.

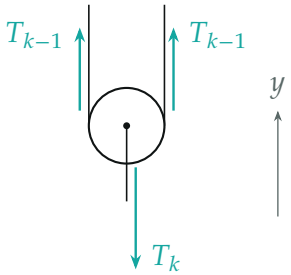
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на систему блоков. Каждый подвижный блок висит на двух кусках одной веревки, поэтому сила, которой его тянут за центр, вдвое больше натяжения этой веревки. Цепочка из n блоков усиливает силу муравья в 2^n раз. Муравей перетянет слона, если усиленная сила окажется больше 5000 Н.

Обозначения. $F_0 = 1$ Н — сила муравья, $F_c = 5000$ Н — сила слона; T_k — натяжение веревки, привязанной к центру k-го подвижного блока ($T_0 = F_0$ — натяжение веревки муравья); n — число подвижных блоков.

1. Неподвижный блок. Блок невесомый и вращается свободно, поэтому натяжение веревки по обе стороны от него одинаково: веревка, идущая к блоку 1, натянута с силой $T_0 = F_0 = 1$ Н. Неподвижный блок меняет только направление силы.

2. Один подвижный блок. Рассмотрим блок k (рисунок 2). Сверху на него действуют два куска одной веревки, каждый с силой T_{k-1}, снизу за центр его тянет веревка с силой T_k. Блок невесомый, поэтому даже при движении сумма сил на него равна нулю. Второй закон Ньютона для блока в проекции на вертикальную ось y вверх:

$$0 = 2T_{k-1} - T_k \quad \Rightarrow \quad T_k = 2T_{k-1}.$$

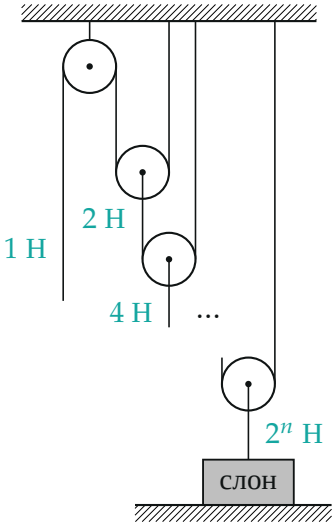


Силы на подвижный блок k: два куска веревки тянут вверх с силой T_{k-1} каждый, веревка за центр — вниз с силой $T_k = 2T_{k-1}$.

3. Вся цепочка. Применяем шаг 2 к блокам $1, 2, \ldots, n$ подряд (рисунок 3):

$$T_1 = 2F_0, \quad T_2 = 4F_0, \quad \ldots, \quad T_n = 2^n F_0.$$

Веревка слона привязана к центру последнего блока, значит, муравей своей силой F_0 удерживает слона, тянущего с силой $2^n F_0$.

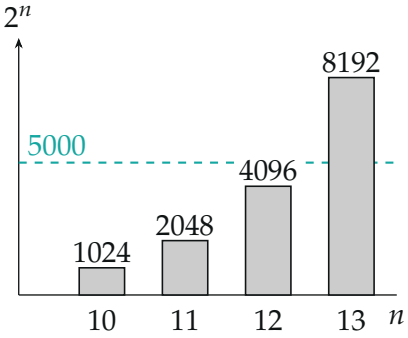


Натяжения веревок вдоль цепочки: после каждого подвижного блока сила удваивается, на веревке слона — 2^n Н.

4. Условие победы муравья. Муравей перетянет веревку, если сила, которую его тяга создаёт на веревке слона, больше силы слона:

$$2^n F_0 > F_\text{с} \quad \Rightarrow \quad 2^n > \frac{5000\ \text{Н}}{1\ \text{Н}} = 5000.$$

5. Наименьшее n. Степени двойки (рисунок 4): $2^{12} = 4096 < 5000$, $2^{13} = 8192 > 5000$. Значит, 12 блоков мало, наименьшее число — $n = 13$.



Выигрыш в силе 2^n для $n = 10 \dots 13$: впервые выше уровня 5000 — при $n = 13$.

Обратите внимание. Неподвижный блок выигрыша в силе не даёт и в число n не входит — считаются только подвижные блоки.

Проверка. Размерность: 2^n безразмерно, $2^n F_0$ — сила в ньютонах, сравнивается с силой слона. Предел: при $n = 0$ (без подвижных блоков) муравей тянет слона напрямую, $1 < 5000$ — проигрыш, как и должно быть. Цена выигрыша — путь: чтобы слон сместился на 1 см, муравей должен вытянуть 2^{13} см ≈ 82 м веревки, работы муравья и слона при этом равны.

Смысл: удвоение на каждом блоке растёт очень быстро, и всего 13 блоков хватает, чтобы сила в 1 Н превзошла 5000 Н.

Ответ. $n = 13$ подвижных блоков.