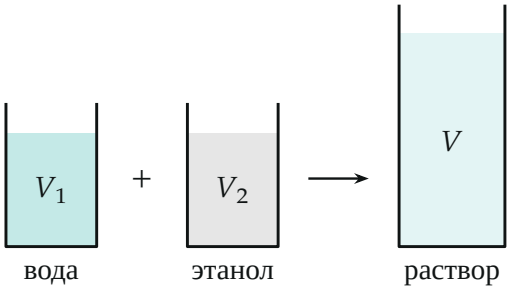
Вода и этанол при смешивании

Задача 3. [Курчатов 2021/22, 7 класс, задача 3] V_1 литров воды и V_2 литров этанола смешивают друг с другом так, что объём их раствора равен $V = 1$ дм^3 и что массовая доля этанола в растворе равна $p = 0{,}441$. Из-за протекания химических реакций при смешивании этих жидкостей происходит сжатие $\gamma = 6\%$, то есть объём полученного раствора на 6% меньше, чем суммарный объём воды и этанола $V_1 + V_2$. Найдите объёмы V_1 и V_2. Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, этанола $\rho_2 = 790$ кг/м^3.



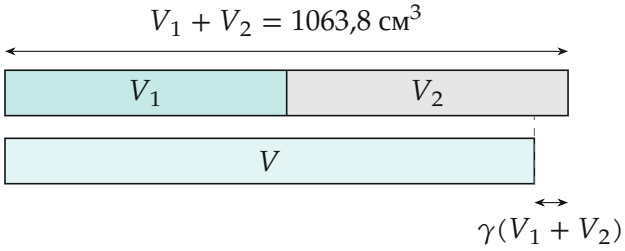
Поясняющий рисунок: воду объёмом V_1 и этанол объёмом V_2 сливают вместе, получается раствор объёмом V, меньшим $V_1 + V_2$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на массу, объём и плотность смеси. При смешивании масса сохраняется: масса раствора равна сумме масс воды и этанола. Объём же не сохраняется — он уменьшается на 6%. Два условия — массовая доля и сжатие — дают два уравнения на два неизвестных объёма. Массовая доля задаёт отношение масс, а через плотности — отношение объёмов; сжатие задаёт сумму объёмов.

Обозначения. $m_1 = \rho_1 V_1$ — масса воды, $m_2 = \rho_2 V_2$ — масса этанола; V — объём раствора; p — доля массы этанола в массе раствора, γ — доля, на которую объём раствора меньше $V_1 + V_2$.

1. Сжатие: сумма объёмов. Объём раствора на долю γ меньше суммы объёмов (рисунок 2):

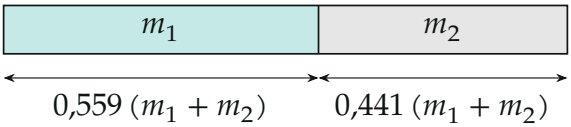
$$V = (1-\gamma)(V_1+V_2) \quad \Rightarrow \quad V_1+V_2 = \frac{V}{1-\gamma} = \frac{1000\text{ см}^3}{0{,}94} = 1063{,}8\text{ см}^3.$$



Объёмы в масштабе: верхняя полоса — вода и этанол до смешивания, нижняя — раствор, короче на 6%.

2. Массовая доля: отношение масс. По определению массовой доли этанола

$$p = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{p}{1-p}\, m_1 = \frac{0{,}441}{0{,}559}\, m_1 = 0{,}789\, m_1.$$



Массы в масштабе: этанол — доля $p = 0{,}441$ массы раствора, вода — остальные $0{,}559$.

3. Отношение объёмов. Переходим от масс к объёмам через плотности, $m = \rho V$:

$$\rho_2 V_2 = \frac{p}{1-p}\, \rho_1 V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\, V_1 = 0{,}9986\, V_1.$$

Объёмы почти равны: этанола по массе меньше, но он легче воды почти в той же пропорции.

4. Объёмы. Подставляем отношение из шага 3 в сумму из шага 1:

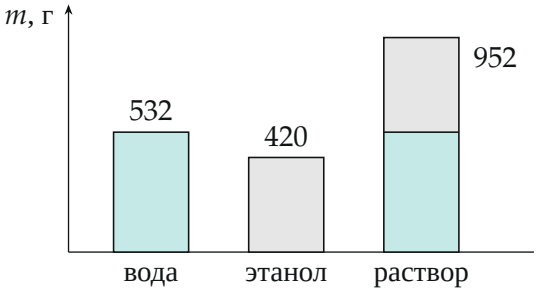
$$V_1 \left(1 + \frac{p}{1-p} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{V}{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V}{(1-\gamma)\left(1 + \dfrac{p\,\rho_1}{(1-p)\,\rho_2}\right)},$$

$$V_1 = \frac{1063{,}8}{1{,}9986}\ \text{см}^3 = 532\ \text{см}^3,$$

$$V_2 = \frac{V}{1-\gamma} - V_1 = 1063{,}8 - 532{,}3 = 531{,}5\ \text{см}^3 \approx 532\ \text{см}^3.$$

Обратите внимание. Сжатие относится к объёму, а не к массе: масса раствора равна $m_1 + m_2$ точно, а объём V меньше $V_1 + V_2$. Поэтому плотность раствора нельзя искать как среднее плотностей по объёму.

Проверка. Массы: $m_1 = 1\ \text{г/см}^3 \cdot 532{,}3\ \text{см}^3 = 532{,}3$ г, $m_2 = 0{,}79\ \text{г/см}^3 \cdot 531{,}5\ \text{см}^3 = 419{,}9$ г. Доля этанола $\dfrac{419{,}9}{532{,}3 + 419{,}9} = 0{,}441$ — совпадает с условием; сумма объёмов $1063{,}8\ \text{см}^3$, и $0{,}94 \cdot 1063{,}8 = 1000\ \text{см}^3$ (рисунок 4). Размерность: в формуле для V_1 дроби $p/(1-p)$ и ρ_1/ρ_2 безразмерны, V_1 — объём. Предел: при $\gamma = 0$ получилось бы $V_1 + V_2 = V$, объёмы по 500 см^3.



Проверка по массам: 420 г этанола в 952 г раствора — доля 0,441; плотность раствора 0,952 г/см³ — между плотностями воды и этанола.

Смысл: воды и этанола берут почти поровну по объёму, около 0,53 л каждого, и из 1,064 л смеси получается ровно литр раствора.

Ответ. $V_1 \approx 532\ \text{см}^3$, $V_2 \approx 532\ \text{см}^3$ (точнее $531{,}5\ \text{см}^3$).