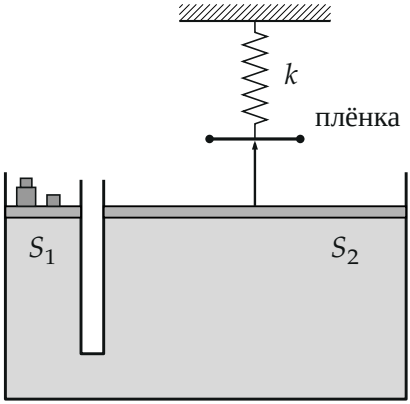
Плёнка, игла и гидравлический пресс

Задача 4. [Курчатов 2021/22, 7 класс, задача 4] К потолку прикреплена пружина, нижняя часть которой представляет собой горизонтальное проволочное кольцо с натянутой на него тонкой нерастяжимой плёнкой. Снизу в плёнку упирается игла — острый вертикальный стержень, нижний конец которого закреплён на большем поршне гидравлического пресса. Площадь поперечного сечения иглы $S_{\text{иглы}} = 4$ мм^2, площади меньшего и большего поршней пресса $S_1 = 100$ см^2 и $S_2 = 400$ см^2. В начальный момент пружина не деформирована. Ученик начинает класть на меньший поршень маленькие грузики. Когда суммарная масса грузиков стала равна $m = 100$ г, плёнка лопнула. Найдите следующие величины:

1. Сдвиг Δx_1 меньшего поршня пресса от своего первоначального положения. Ответ выразите в сантиметрах.
2. Давление P, необходимое для разрушения плёнки. Числовой ответ выразите в мегапаскалях.

Жёсткость пружины равна 8 Н/см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидравлический пресс. Грузики давят на малый поршень, давление в жидкости по закону Паскаля одинаково везде, и на большой поршень действует сила в $S_2/S_1 = 4$ раза больше. Большой поршень поднимается, игла упирается в плёнку и

сжимает пружину. Вся сила большого поршня передаётся через иглу на крошечную площадку 4 мм^2 — давление там огромное, и плёнка рвётся. Сдвиг малого поршня найдём из несжимаемости жидкости, давление разрыва — из силы на иглу.

Обозначения. $F_1 = mg$ — сила грузиков на малый поршень; F_2 — сила жидкости на большой поршень; Δx_1 — сдвиг малого поршня вниз, Δx_2 — сдвиг большого поршня вверх (он же сжатие пружины); $k = 8$ Н/см; $p_ж$ — добавочное давление в жидкости.

Пункт 1.

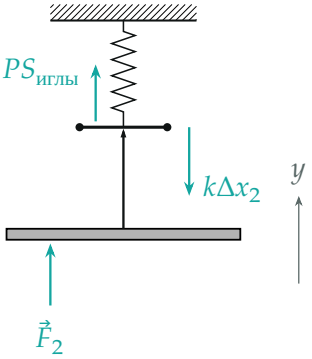
1. Закон Паскаля. Добавочное давление, созданное грузиками, жидкость передаёт без изменения во все точки, в том числе под большой поршень:

$$p_ж = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1\frac{S_2}{S_1} = mg\,\frac{S_2}{S_1} = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 4 = 4\text{ Н}.$$

Плотность жидкости в условии не дана: разностью уровней жидкости под поршнями пренебрегаем, поршни и иглу считаем лёгкими.

2. Равновесие большого поршня с иглой. Грузики кладут маленькими порциями, поршень движется медленно, и в каждый момент силы на него уравновешены (рисунок 2): снизу жидкость давит с силой F_2, сверху через иглу и плёнку давит сжатая пружина с силой $k\Delta x_2$. Плёнка нерастяжимая, кольцо идёт вместе с иглой, поэтому сжатие пружины равно подъёму поршня Δx_2. В проекции на вертикальную ось y вверх:

$$0 = F_2 - k\Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{4\text{ Н}}{8\text{ Н/см}} = 0{,}5\text{ см}.$$

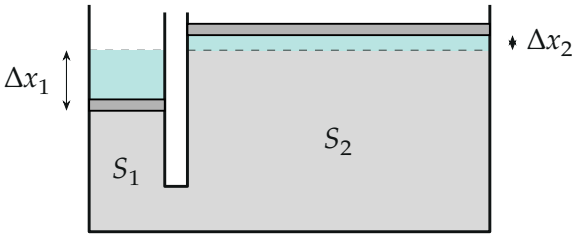


Большой поршень с иглой: снизу жидкость давит силой $\vec{F}_2$, сверху пружина через плёнку — силой $k\Delta x_2$. Игла давит на плёнку силой $PS_{\text{иглы}}$ на площадке $S_{\text{иглы}}$.

3. Несжимаемость жидкости. Объём жидкости не меняется: сколько ушло из-под малого поршня, столько пришло под большой (рисунок 3):

$$S_1\Delta x_1 = S_2\Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = \Delta x_2\frac{S_2}{S_1} = \frac{mg}{k}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 = 0{,}5\text{ см}\cdot 4 = 2\text{ см}.$$

Знак: малый поршень опустился на 2 см, большой поднялся на 0,5 см.



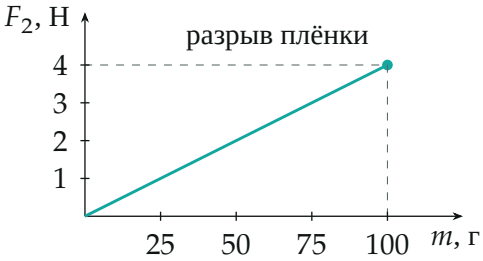
Сдвиги поршней (пунктир — начальное положение). Бирюзовые слои равны по объёму: $S_1\Delta x_1 = S_2\Delta x_2$.

Пункт 2.

4. Давление разрыва. Игла лёгкая, поэтому на плёнку она давит той же силой F_2, с которой её толкает поршень. Эта сила распределена по площадке $S_{\text{иглы}}$; в момент разрыва давление на плёнку равно искомому

P:

$$P = \frac{F_2}{S_{\text{иглы}}} = \frac{mg}{S_{\text{иглы}}} \cdot \frac{S_2}{S_1} = \frac{4\ \text{Н}}{4 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2} = 10^6\ \text{Па} = 1\ \text{МПа}.$$



Сила на иглу растёт пропорционально массе грузиков, $F_2 = 40\ Н/кг \cdot m$; при $m = 100$ г она достигает 4 Н, и давление на плёнку — 1 МПа.

Обратите внимание. Сдвиг малого поршня содержит отношение площадей в квадрате: один раз — в силе (Паскаль), второй раз — в пути (несжимаемость). Пресс выигрывает в силе ровно во столько раз, во сколько проигрывает в пути.

Проверка. Размерности: $\frac{mg}{k}$ — Н/(Н/см) = см; $\frac{mg}{S}$ — Н/м^2 = Па. Энергия: сила на малом поршне росла от нуля до $F_1 = 1$ Н постепенно, её работа $\frac{F_1 \Delta x_1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ Н·см; энергия сжатой пружины $\frac{k \Delta x_2^2}{2} = \frac{8 \cdot 0{,}5^2}{2} = 1$ Н·см — совпадает.

Смысл: сто граммов на малом поршне через пресс и тонкую иглу создают давление в десять атмосфер.

Ответ. 1) $\Delta x_1 = \frac{mg}{k}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 = 2$ см; 2) $P = \frac{mg}{S_{\text{иглы}}} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 1$ МПа.