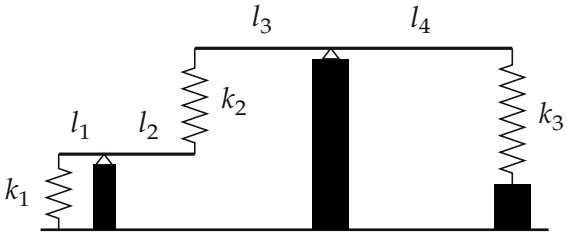
Два рычага с пружинами

Задача 5. [Курчатов 2021/22, 7 класс, задача 5] К двум очень лёгким рычагам с точками опоры, расположенными на разной высоте, прикреплены пружины, как показано на рисунке. Жёсткости пружин равны: $k_1 = k_2 = k_3$. Система находится в равновесии, рычаги расположены горизонтально, а деформации пружин имеют только вертикальные составляющие. Найдите модуль отношения деформации пружины k_3 к деформации пружины k_1, если плечи рычагов соотносятся следующим образом: $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 2 : 3 : 4$. Ответ округлите до третьей значащей цифры.



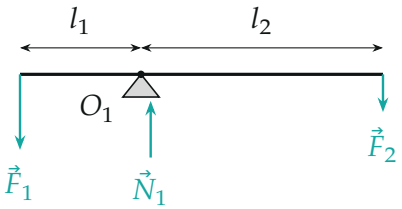
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие рычагов. Каждый рычаг лёгкий и неподвижен, поэтому моменты сил пружин относительно его точки опоры уравновешены. Пружина k_2 связывает рычаги: она давит на правый конец нижнего рычага и на левый конец верхнего с одинаковой по модулю силой (пружина лёгкая). По цепочке нижний рычаг → пружина k_2 → верхний рычаг сила пружины k_3 выражается через силу пружины k_1, а при равных жёсткостях отношение деформаций равно отношению сил.

Обозначения. F_1, F_4 — модули сил пружин k_1 и k_3 на концы рычагов; F_2 и F_3 — модули сил пружины k_2 на нижний и верхний рычаги; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — деформации пружин k_1, k_2, k_3; $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $l_3 = 3l$, $l_4 = 4l$. По закону Гука $F = k\Delta$.

1. Нижний рычаг. Пусть пружина k_1 растянута и тянет левый конец вниз (рисунок 2). Рычаг лёгкий, правило моментов относительно его опоры O_1 (сила реакции опоры приложена в O_1 и момента не даёт):

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{l_1}{l_2} = \frac{F_1}{2}.$$

Сила F_1 поворачивает рычаг против часовой стрелки, значит, F_2 должна поворачивать по часовой — тянуть правый конец тоже вниз. Вниз давить на правый конец снизу-вверх расположенная пружина k_2 может, только если она сжата.



Силы на нижний рычаг: растянутая пружина k_1 тянет левый конец вниз, сжатая пружина k_2 давит на правый конец вниз, опора O_1 — вверх.

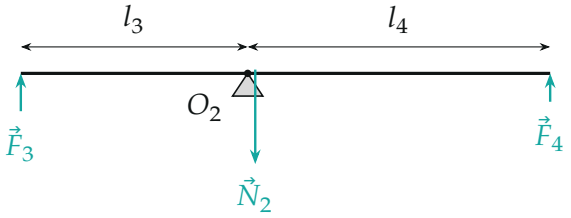
2. Пружина k_2. Пружина лёгкая, по третьему закону Ньютона и условию равновесия самой пружины она давит на оба рычага с одинаковой по модулю силой, но в противоположные стороны: на нижний — вниз, на верхний — вверх:

$$F_3 = F_2 = \frac{F_1}{2}.$$

3. Верхний рычаг. Правило моментов относительно опоры O_2 (рисунок 3):

$$F_3 l_3 = F_4 l_4 \quad \Rightarrow \quad F_4 = F_3 \frac{l_3}{l_4} = \frac{F_1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} F_1.$$

Сила F_3 поднимает левый конец, поворачивая рычаг по часовой стрелке; уравновесить её может только сила, поднимающая правый конец. Пружина k_3 стоит под правым концом, значит, она сжата и давит вверх.

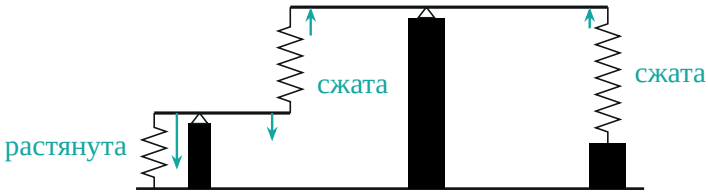


Силы на верхний рычаг: сжатые пружины k_2 и k_3 толкают концы вверх, шарнир опоры O_2 удерживает рычаг силой $\vec{N}_2$, направленной вниз, $N_2 = F_3 + F_4$.

4. Отношение деформаций. По закону Гука $F_1 = k\Delta_1$, $F_4 = k\Delta_3$, жёсткости равны:

$$\left|\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right| = \frac{F_4}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{l_3}{l_4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Если считать растяжение положительным, а сжатие отрицательным, $\Delta_3/\Delta_1 = -3/8$: пружина k_1 растянута, k_3 сжата (рисунок 4). Предположи мы в начале, что k_1 сжата, — все силы сменили бы направления, k_3 оказалась бы растянутой, а модуль отношения остался бы тем же.



Итог: при растянутой пружине k_1 пружины k_2 и k_3 сжаты; стрелки — силы пружин на концы рычагов, длины пропорциональны $F_1 : F_2 : F_4 = 8 : 4 : 3$.

Обратите внимание. Силы пружины k_2 на два рычага равны по модулю, но противоположны по направлению: на нижний рычаг — вниз, на верхний — вверх. Именно это меняет характер деформации от k_1 к k_3.

Проверка. Размерность: отношение деформаций — отношение длин, безразмерно. Второй способ — выигрыш в силе: нижний рычаг ослабляет силу в $l_2/l_1 = 2$ раза, верхний — ещё в $l_4/l_3 = 4/3$ раза, всего в $2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ раза, $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Смысл: оба рычага уменьшают передаваемую силу, поэтому пружина k_3 деформирована слабее пружины k_1.

Ответ. $\left|\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right| = \frac{l_1 l_3}{l_2 l_4} = 0{,}375.$