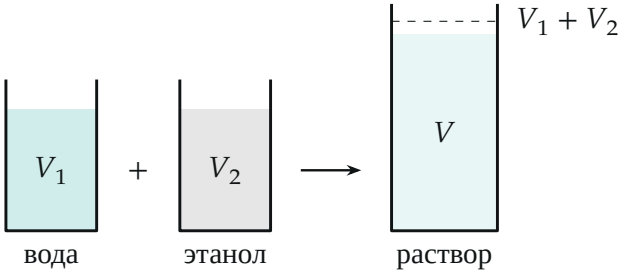
Вода и этанол при смешивании

Задача 1. [Курчатов 2021/22, 8 класс, задача 1] V_1 литров воды и V_2 литров этанола смешивают друг с другом так, что объем их раствора равен $V = 1$ дм^3 и что массовая доля этанола в растворе равна $p = 0{,}441$. Из-за протекания химических реакций при смешивании этих жидкостей происходит сжатие $\gamma = 6\,\%$, то есть объем полученного раствора на 6 % меньше, чем суммарный объем воды и этанола $V_1 + V_2$. Найдите объемы V_1 и V_2. Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, этанола $\rho_2 = 790$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: при смешивании объём раствора V меньше суммы $V_1 + V_2$ (пунктир) на 6 %, массы же складываются.

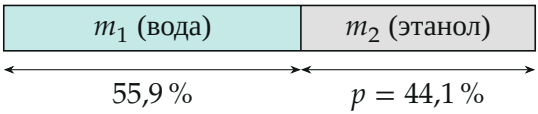
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плотность и массовые доли. Главное: при смешивании *масса* сохраняется, а *объём* — нет, он уменьшается на γ. Поэтому одно уравнение пишем для масс (массовая доля), другое — для объёмов (сжатие). Две неизвестные V_1, V_2 — два уравнения.

Обозначения. $m_1 = \rho_1 V_1$ — масса воды, $m_2 = \rho_2 V_2$ — масса этанола.

1. Массовая доля. Масса раствора — сумма масс компонентов (закон сохранения массы). По определению массовой доли этанола

$$p = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{p}{1-p}\, m_1 = \frac{0{,}441}{0{,}559}\, m_1 \approx 0{,}789\, m_1.$$

Через объёмы: $\rho_2 V_2 = 0{,}789\, \rho_1 V_1$ (рисунок 2).



Массы в растворе: этанола 44,1 %, воды 55,9 %, отношение $m_2/m_1 \approx 0{,}789$.

2. Сжатие. Объём раствора на γ меньше суммы объёмов:

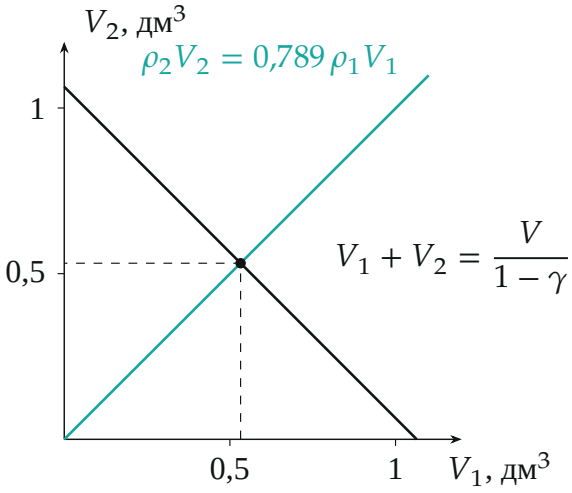
$$V = (1-\gamma)(V_1 + V_2) \quad \Rightarrow \quad V_1 + V_2 = \frac{V}{1-\gamma} = \frac{1}{0{,}94} \approx 1{,}064 \text{ дм}^3.$$

3. Решаем. Из пункта 1 $V_2 = 0{,}789\,\dfrac{\rho_1}{\rho_2} V_1 = \dfrac{0{,}789 \cdot 1000}{790} V_1 \approx 0{,}999\, V_1$. Подставим в пункт 2:

$$V_1 = \frac{V}{(1-\gamma)\left(1 + \dfrac{p}{1-p}\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)} = \frac{1{,}064}{1{,}999} \approx 0{,}532 \text{ дм}^3,$$

$$V_2 \approx 0{,}999\, V_1 \approx 0{,}532 \text{ дм}^3.$$

Объёмы почти равны — совпадение чисел условия: отношение масс 0,789 почти равно отношению плотностей 0,79. Графически решение — пересечение двух прямых на плоскости $(V_1; V_2)$ (рисунок 3).

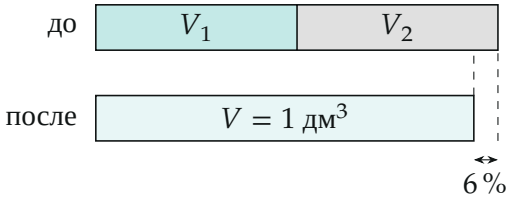


Чёрная прямая — условие сжатия, бирюзовая — условие массовой доли. Пересечение $(0{,}532;\ 0{,}532)$ *дм*^{3}.

4. Второй способ — через массу раствора. Масса раствора $M = m_1 + m_2$, этанола в нём pM, воды $(1-p)M$. Сумма объёмов

$$\frac{(1-p)M}{\rho_1} + \frac{pM}{\rho_2} = \frac{V}{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1{,}064\cdot 10^{-3}}{\dfrac{0{,}559}{1000} + \dfrac{0{,}441}{790}} \approx 0{,}952 \text{ кг}.$$

Тогда $V_1 = \dfrac{0{,}559\cdot 0{,}952}{1000} \approx 532$ см^3, $V_2 = \dfrac{0{,}441\cdot 0{,}952}{790} \approx 532$ см^3 — то же. Плотность раствора $M/V \approx 952$ кг/м^3 (рисунок 4).



Объёмы до и после смешивания в масштабе: $V_1 + V_2 \approx 1{,}064$ *дм*^{3} *сжались до* 1 *дм*^{3}.

Обратите внимание. Сжатие считается от суммы $V_1 + V_2$, поэтому $V_1 + V_2 = V/(1-\gamma) = 1{,}0638V$, а не $(1+\gamma)V = 1{,}06V$. Организаторы пишут $1{,}064V$ — это и есть $1/0{,}94$.

Ответ. $V_1 = \dfrac{V}{(1-\gamma)(1+\frac{p}{1-p}\frac{\rho_1}{\rho_2})} \approx 532$ см^3, $V_2 = \dfrac{p}{1-p}\dfrac{\rho_1}{\rho_2}V_1 \approx 532$ см^3.

Проверка. Подстановка: $m_1 = 0{,}532$ кг, $m_2 = 0{,}790 \cdot 0{,}532 = 0{,}420$ кг, доля $0{,}420/0{,}952 = 0{,}441$ — верно; $(0{,}532 + 0{,}532) \cdot 0{,}94 = 1{,}000$ дм^3 — верно. Предел $\gamma = 0$: $V_1 + V_2 = V$, объёмы по 0,5 дм^3 — разумно. Размерность: множители при V безразмерны.

Смысл: в литр такого раствора уходит по 0,53 л воды и спирта — больше литра в сумме.

Ответ. $V_1 \approx 532$ см^3, $V_2 \approx 532$ см^3.