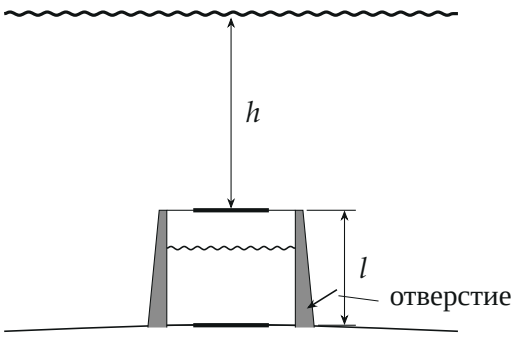
Побег из башни подводной лодки

Задача 3. [Курчатов 2021/22, 8 класс, задача 3] Джеймс Бонд сбегает с подводной лодки через её башню. Первоначально давление в башне такое же, как и давление воздуха на воду: $p_0 = 100$ кПа. После закрытия люка, отделяющего башню от остальной части подводной лодки, Бонд делает отверстие внутри стенки башни (см. рисунок), после чего башня частично заливается водой. Далее Бонд открывает потолочный люк и выплывает на поверхность с высвободившимся воздухом.

а) Какой толщины слой воздуха внутри башни до открытия потолочного люка и после того, как внутрь перестала поступать вода?

б) Насколько велика суммарная сила, приложенная к потолочному люку со стороны воздуха и воды до открытия люка и в течение времени, когда уровень воды внутри башни пришел в стабильное состояние?

Площадь люка $S = 0{,}50$ м^2, уровень воды над люком $h = 25$ м, высота башни $l = 2{,}0$ м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на гидростатическое давление и закон Бойля — Мариотта. Сначала в башне воздух при p_0, а снаружи на глубине h давление гораздо больше. Через отверстие внизу вода входит и сжимает воздух под потолком. Вода перестаёт поступать, когда давление сжатого воздуха сравнялось с давлением воды на уровне её

поверхности в башне. Отсюда толщина слоя d. Сила на люк — разность давлений воды сверху и воздуха снизу, умноженная на площадь.

Обозначения. d — толщина слоя воздуха под потолком, p — давление этого воздуха, ось y — вниз от поверхности моря. Башня — цилиндр с площадью сечения Σ (она сократится), температура воздуха постоянна.

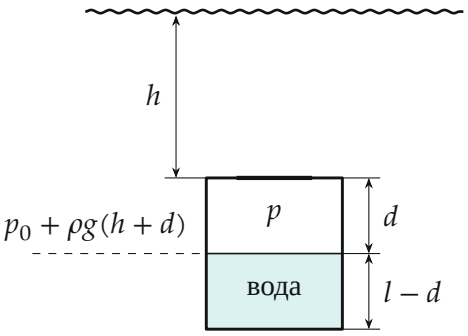
Пункт а).

1. Закон Бойля — Мариотта. Масса воздуха в башне не меняется, температура тоже (процесс медленный, воздух успевает отдать тепло воде). Тогда $pV = \text{const}$:

$$p_0\, l\Sigma = p\, d\Sigma \quad \Rightarrow \quad p = p_0\, \frac{l}{d}.$$

2. Равновесие уровня. Вода в башне и вода снаружи сообщаются через отверстие. Уровень встал — значит, давление в воде на поверхности воды в башне равно давлению воздуха над ней. Поверхность воды в башне — на глубине $h + d$ от поверхности моря (рисунок 2). Гидростатическое давление в покоящейся воде, которая сообщается с морем:

$$p = p_0 + \rho g\,(h + d).$$



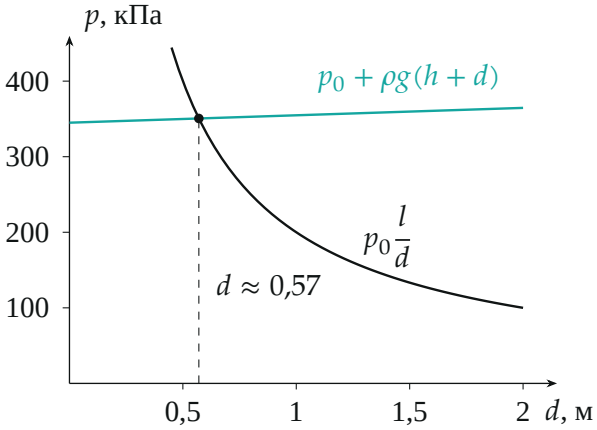
После того как вода перестала поступать: воздух сжат в слой d под люком. На уровне воды в башне (пунктир) давление такое же, как в море на этой глубине.

3. Уравнение для d. Приравниваем:

$$p_0 \frac{l}{d} = p_0 + \rho g\,(h + d) \quad \Rightarrow \quad \rho g\, d^2 + (p_0 + \rho g h)\, d - p_0 l = 0,$$

$$d = \frac{-(p_0 + \rho g h) + \sqrt{(p_0 + \rho g h)^2 + 4\rho g\, p_0 l}}{2\rho g} \approx 0{,}57 \text{ м}.$$

Второй корень отрицателен. Давление воздуха $p = p_0 l/d \approx 351$ кПа. Решение графически — пересечение кривой $p_0 l/d$ с прямой $p_0 + \rho g(h + d)$ (рисунок 3).



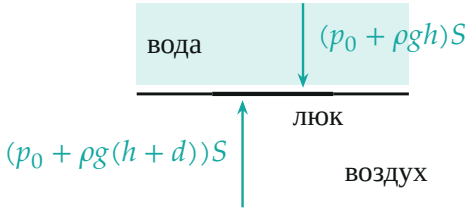
Давление воздуха (чёрная, закон Бойля — Мариотта) и давление воды на уровне её поверхности в башне (бирюзовая) в зависимости от толщины слоя d. Равновесие — пересечение.

Пункт б).

4. Силы на люк. Сверху на люк давит вода с давлением на глубине h: $p_0 + \rho g h$; снизу — воздух башни с давлением $p = p_0 + \rho g(h + d)$ (рисунок 4). Равнодействующая направлена вверх:

$$F = (p_0 + \rho g(h + d))S - (p_0 + \rho g h)S = \rho g\, d\, S,$$

$$F = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}5 \approx 2{,}8 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$



Силы давления на люк: вода сверху, сжатый воздух снизу. Снизу сила больше на $\rho g dS$ — люк выталкивает вверх.

Обратите внимание. Атмосферное давление p_0 входит в закон Бойля — Мариотта (оно определяет, сколько в башне воздуха), но из силы на люк выпадает. И давление воздуха снизу задаёт не глубина люка, а глубина уровня воды в башне $h+d$. Для сравнения: до пробоя стенки воздух в башне был при p_0, и вода прижимала люк вниз силой $\rho ghS \approx 1{,}2\cdot10^5$ Н — открыть его было невозможно; после заполнения люк, наоборот, выталкивается вверх.

Ответ. а) $d = \dfrac{\sqrt{(p_0+\rho gh)^2+4\rho g p_0 l}-(p_0+\rho gh)}{2\rho g} \approx 57$ см; б) $F = \rho g\, dS \approx 2{,}8$ кН, направлена вверх.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Па}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{м/с}^2} = \text{м}$; $\text{Па}\cdot\text{м}^2 = \text{Н}$. Подстановка: $p_0 l/d = 100\cdot 2/0{,}5705 = 350{,}6$ кПа, $p_0+\rho g(h+d) = 100+245+5{,}6 = 350{,}6$ кПа — верно. Оценка: если пренебречь d рядом с h, $d \approx \dfrac{p_0 l}{p_0+\rho gh} = \dfrac{200}{345} = 0{,}58$ м — близко.

Смысл: воздух сжимается примерно в 3,5 раза, и под люком остаётся воздушная подушка в полметра — она и даёт Бонду открыть люк.

Ответ. а) $d \approx 57$ см; б) $F = \rho g\, dS \approx 2{,}8$ кН (вверх).