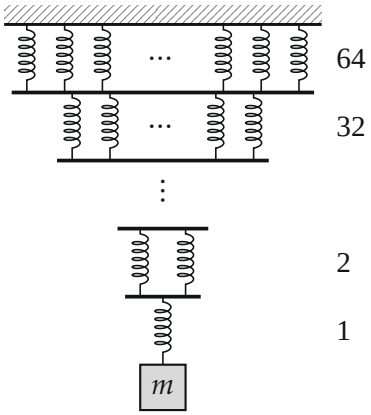
Двоичная система пружин

Задача 5. [Курчатов 2021/22, 8 класс, задача 5] К потолку прикреплены 64 одинаковые пружины. Вторым концом все 64 пружины присоединены к невесомой доске. К этой доске с другой стороны прикреплены 32 такие же пружины, которые присоединены ко второй невесомой доске. Эту систему продолжали так, что на каждом следующем уровне было в два раза меньше пружин, пока в конце не осталась всего одна пружина. К её свободному концу подвесили небольшой груз. Под весом этого груза система пружин немного растянулась. Определите, на сколько сантиметров растянулась система пружин от своего первоначального положения, если отношение массы груза к жесткости одной пружины равно $\frac{32}{127}$ кг · см/Н.

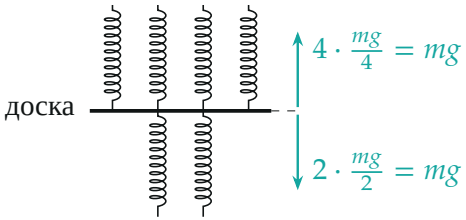


Поясняющий рисунок: семь уровней пружин (справа — число пружин на уровне), между уровнями — невесомые доски.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на последовательное и параллельное соединение пружин. Внутри одного уровня пружины соединены параллельно: они растягиваются одинаково, а силы складываются. Уровни между собой соединены последовательно: через каждый уровень передаётся одна и та же сила mg, а удлинения складываются. Всё растяжение — сумма удлинений уровней, получается геометрическая прогрессия.

Обозначения. k — жёсткость одной пружины; уровень с номером n содержит 2^n пружин ($n = 0$ — одна пружина у груза, $n = 6$ — 64 пружины у потолка); k_n — жёсткость уровня, x_n — его удлинение; K — жёсткость всей системы, Δx — растяжение; $g \approx 10$ м/с^2.

1. Сила через каждый уровень. Рассмотрим груз в равновесии: второй закон Ньютона, $T_0 = mg$ — нижняя пружина тянет груз вверх с силой mg. Доски невесомы: сумма сил на любую доску равна нулю, поэтому пружины над доской в сумме тянут её вверх с той же силой, с какой пружины под ней тянут вниз. Значит, через каждый уровень передаётся одна и та же сила mg (рисунок 2).



Невесомая доска между уровнями из двух и четырёх пружин: вниз её тянут две пружины по $mg/2$, вверх — четыре по $mg/4$. В сумме сверху и снизу — по mg.

2. Один уровень. Доска жёсткая, поэтому все 2^n пружин уровня растянуты одинаково на x_n. По закону Гука каждая тянет с силой kx_n, вместе

$$2^n k\, x_n = mg \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{mg}{2^n k}, \qquad k_n = 2^n k.$$

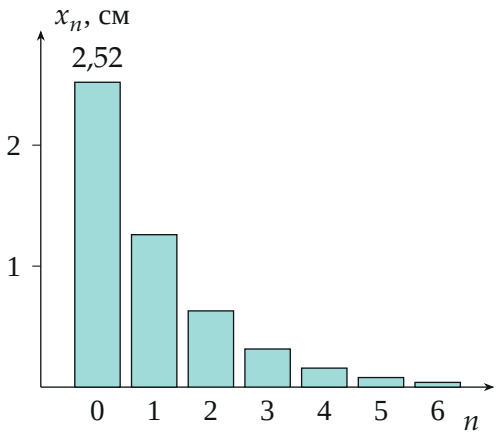
Чем больше пружин в уровне, тем меньше он растягивается: на каждую приходится лишь $mg/2^n$.

3. Вся система. Удлинения уровней складываются (рисунок 3):

$$\Delta x = \sum_{n=0}^{6} x_n = \frac{mg}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64}\right) = \frac{mg}{k} \cdot \frac{127}{64}.$$

Сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$: $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{64} = 2 - \frac{1}{64} = \frac{127}{64}$. Эквивалентная жёсткость $K = \frac{64}{127}k$ — чуть больше

половины жёсткости одной пружины.



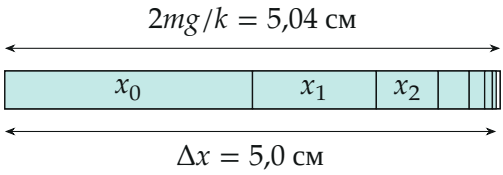
Удлинения уровней $x_n = \dfrac{mg}{2^n k}$ при $g = 10$ м/с^2: каждое вдвое меньше предыдущего, сумма 5,0 см.

4. Числа. $\dfrac{m}{k} = \dfrac{32}{127}$ кг · см/Н, $g = 10$ Н/кг:

$$\Delta x = \frac{127}{64} \cdot \frac{32}{127} \cdot 10 = 5 \text{ см}.$$

Числа условия подобраны под $g = 10$ м/с^2; с $g = 9{,}8$ м/с^2 получилось бы 4,9 см.

5. Второй взгляд — пружины «по столбикам». Сила mg делится пополам на каждой доске. Нижняя пружина растянута на mg/k — как будто весь груз висит на ней одной. Каждый следующий уровень добавляет вдвое меньше; бесконечная цепочка дала бы ровно $2mg/k$, семь уровней — без последней $\frac{1}{64}$ части (рисунок 4). Так видно, что ответ близок к $2mg/k = 5{,}04$ см и чуть меньше.



Растяжение — сумма отрезков, каждый вдвое короче предыдущего; до $2mg/k$ не хватает последней половинки самого маленького отрезка.

Обратите внимание. Удлинения складываются у последовательно соединённых уровней, а не у пружин одного уровня: там все растянуты одинаково. Много пружин у потолка почти ничего не добавляют — главное растяжение у одиночной нижней пружины.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{127}{64}\,\dfrac{m}{k}\,g = 5$ см.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}\cdot\text{см}}{\text{Н}}\cdot\dfrac{\text{Н}}{\text{кг}} = $ см. Предел: один уровень (одна пружина) — $\Delta x = mg/k$, как и должно быть; уровней становится бесконечно много — $\Delta x \to 2mg/k$, конечный предел.

Смысл: 127 пружин растягиваются всего вдвое сильнее одной.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{127}{64}\,\dfrac{m}{k}\,g = 5$ см (при $g = 10$ м/с^2).