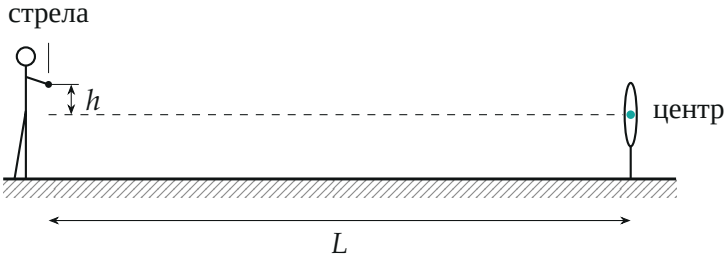
Стрельба из лука

Задача 1. [Курчатов 2021/22, 9 класс, задача 1] Вова участвует в соревнованиях по стрельбе из лука, где ему нужно поразить цель на расстоянии $L = 200$ м. Под каким углом α к горизонту Вова должен стрелять из лука, чтобы попасть точно в середину мишени? При натяжении лука работа Вовы равна $A = 500$ Дж, КПД лука $\eta = 0{,}17$. Масса стрелы $m = 54$ г. В момент выстрела стрела находится на $h = 70$ см выше центра мишени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



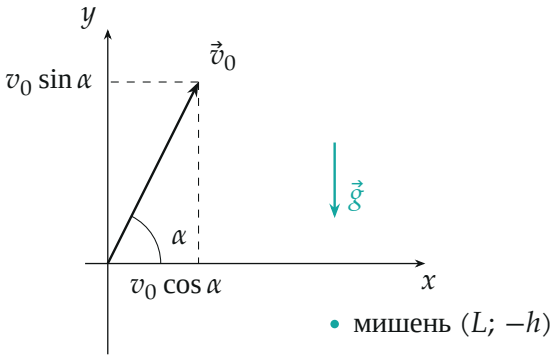
Поясняющий рисунок: стрела в момент выстрела выше центра мишени на h, до мишени по горизонтали L (масштаб по вертикали увеличен).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, плюс энергия. Сначала из КПД лука находим, какую кинетическую энергию получила стрела, и отсюда модуль начальной скорости v_0. Дальше стрела летит только под действием силы тяжести: по горизонтали равномерно, по вертикали равноускоренно. Требуем, чтобы через время полёта стрела оказалась на L правее и на h ниже точки вылета. При заданной скорости в точку попадают по двум траекториям — навесной и настильной, поэтому углов будет два.

Обозначения. v_0 — скорость стрелы сразу после выстрела, α — её угол с горизонтом, τ — время полёта до мишени. Начало координат — точка вылета; ось x горизонтально к мишени, ось y вертикально вверх (рисунок 2).

1. Скорость стрелы. Работа Вовы A идёт на деформацию лука, стреле достаётся доля η. По определению КПД кинетическая энергия стрелы

$$\frac{mv_0^2}{2} = \eta A \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}17 \cdot 500}{0{,}054}} \approx 56{,}1 \text{ м/с}.$$



Оси и проекции начальной скорости. Ускорение $\vec{g}$ направлено против оси y, по оси x ускорения нет.

2. Уравнения движения. Сопротивления воздуха нет, на стрелу действует только сила тяжести, ускорение $\vec{a} = \vec{g}$. Проекции на оси: $a_x = 0$, $a_y = -g$. Координаты стрелы в момент t:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Мишень — точка $(L; -h)$: через время полёта τ

$$v_0 \cos\alpha \cdot \tau = L, \qquad v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = -h.$$

3. Уравнение для угла. Из первого уравнения $\tau = \dfrac{L}{v_0 \cos\alpha}$. Подста-

вим во второе и учтём $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$:

$$L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = -h.$$

Это квадратное уравнение относительно $u = \operatorname{tg}\alpha$. Обозначим $s = \dfrac{gL^2}{2v_0^2} = \dfrac{gL^2 m}{4\eta A}$:

$$s\,u^2 - L\,u + (s - h) = 0, \qquad u_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4s(s-h)}}{2s}.$$

Числа: $s = \dfrac{9{,}8 \cdot 200^2 \cdot 0{,}054}{4 \cdot 0{,}17 \cdot 500} \approx 62{,}3$ м, отсюда

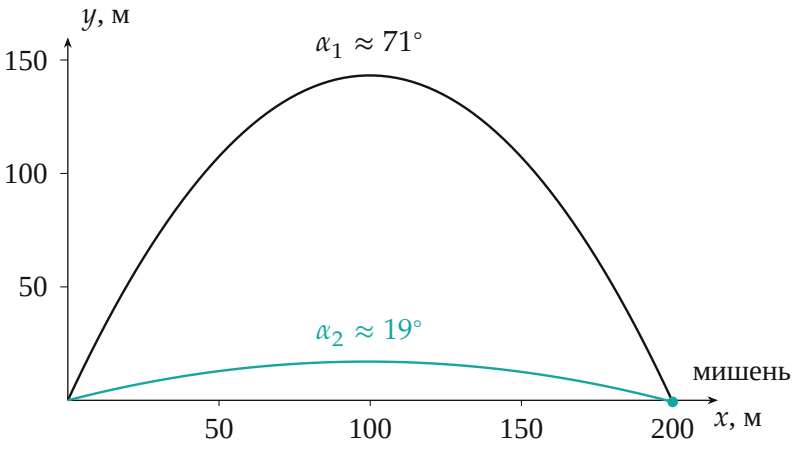
$$\operatorname{tg}\alpha_1 \approx 2{,}87, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 \approx 0{,}345.$$

Дискриминант положителен — скорости хватает, корней два.

4. Углы.

$$\alpha_1 \approx 70{,}8^\circ\ (\cos\alpha_1 \approx 0{,}33), \qquad \alpha_2 \approx 19{,}0^\circ\ (\cos\alpha_2 \approx 0{,}95).$$

Время полёта $\tau = L/(v_0\cos\alpha)$: $\tau_1 \approx 10{,}8$ с по навесной траектории и $\tau_2 \approx 3{,}8$ с по настильной. Обе траектории построены по этим числам на рисунке 3.

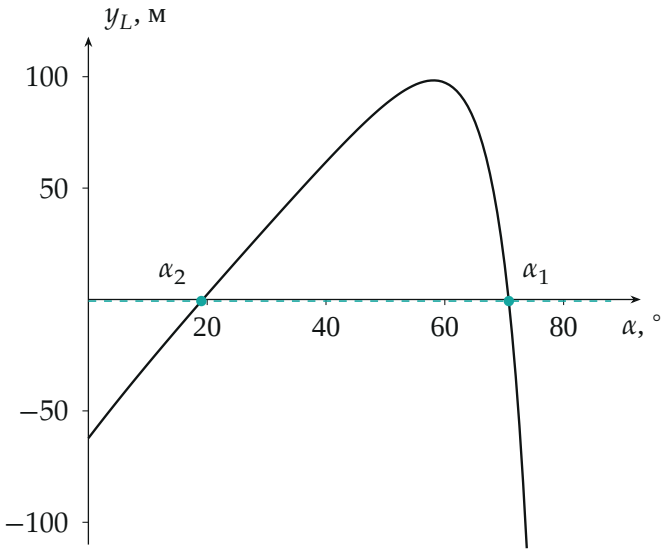


Две траектории стрелы, построенные по уравнению $y(x)$ при $v_0 = 56{,}1$ м/с: навесная (чёрная) и настильная (бирюзовая). Обе приходят в центр мишени.

5. Почему корней два — второй взгляд. Зафиксируем скорость и будем менять угол. Высота стрелы на расстоянии L:

$$y_L(\alpha) = L\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

При малом угле стрела падает раньше мишени, при угле около 90° — тоже (летит почти вертикально). Между ними y_L проходит через максимум, и уровень $-h$ пересекается дважды (рисунок 4). Если бы скорость была меньше, максимум оказался бы ниже $-h$, и попасть было бы нельзя.



Высота стрелы над точкой вылета на расстоянии L в зависимости от угла выстрела. Бирюзовая пунктирная — уровень центра мишени $-h = -0{,}7$ м (в масштабе почти совпадает с осью).

Обратите внимание. Энергию стреле даёт не вся работа Вовы, а только её доля η. И высота h хоть и мала по сравнению с L, входит в уравнение: в квадратном уравнении она стоит в свободном члене $s - h$.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \dfrac{L \pm \sqrt{L^2 - 4s(s-h)}}{2s}$, где $s = \dfrac{gL^2 m}{4\eta A}$; $\alpha_1 \approx 71°$, $\alpha_2 \approx 19°$.

Проверка. Размерность: $s = \dfrac{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{Дж}} = \text{м}$, в u — метры делятся на метры, тангенс безразмерен. Подстановка: при $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}345$ время $\tau_2 = 3{,}77$ с, $y = 56{,}1 \cdot \sin 19{,}0° \cdot 3{,}77 - 4{,}9 \cdot 3{,}77^2 \approx -0{,}70$ м — ровно $-h$. Предел $h = 0$: корни $u_1 u_2 = 1$, то есть $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ — известное свойство двух углов при одной дальности; у нас $70{,}8° + 19{,}0° \approx 90°$, поправка от малого h мала.

Смысл: при скорости 56 м/с попасть можно и «навесом» почти вертикально, и почти прямой наводкой; стрелку удобнее второй угол — полёт втрое короче.

Ответ. $\alpha_1 \approx 71°$ ($\cos\alpha_1 \approx 0{,}33$) или $\alpha_2 \approx 19°$ ($\cos\alpha_2 \approx 0{,}95$).