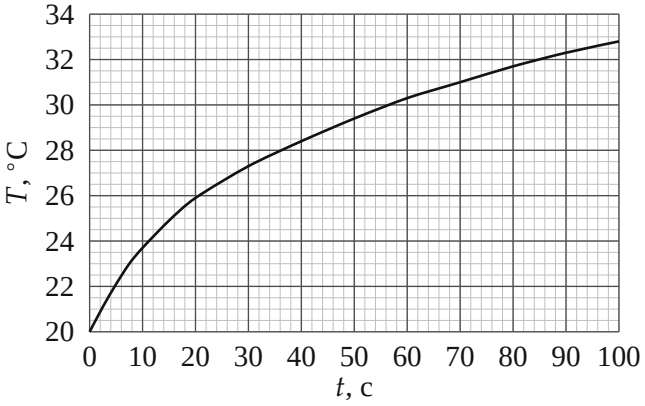
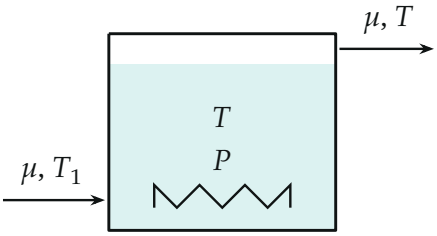
Проточный водонагреватель

Задача 2. [Курчатов 2021/22, 9 класс, задача 2] В водонагревателе мощностью $P = 2{,}0$ кВт изначально находится вода массы m_0 и температуры $T_0 = 20\,^\circ$C. Водонагреватель включают, и в этот же момент вода с той же температурой $T_1 = 20\,^\circ$C начинает поступать извне в нагреватель с постоянной скоростью, то есть масса поступающей извне воды в единицу времени постоянна и равна $\mu = \text{const}$ (г/с). Когда нагреватель полностью наполняется водой, вода начинает вытекать из отверстия сверху. Температура вытекающей воды продолжает расти до установления на уровне $36\,^\circ$C. График изменения температуры воды, вытекающей из нагревателя, показан на рисунке. Найдите начальную массу воды m_0 и массу поступающей извне воды в единицу времени μ. Предположим, что, кроме вытекающей из нагревателя воды, потерь тепла нет, а вода в нагревателе всегда имеет одинаковую температуру. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К).



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на тепловой баланс с графиком. В начале вода не вытекает, а поступающая вода той же температуры $20\,^\circ$C, что и вода в баке, — вся мощность нагревателя идёт на нагрев массы m_0. Скорость роста температуры в момент $t = 0$ (наклон касательной к графику) даёт m_0. В конце температура перестаёт расти: вся мощность уходит на нагрев протекающей воды от 20 до $36\,^\circ$C — это даёт μ.

Обозначения. T — температура воды в баке (она же температура вытекающей воды: вода перемешана), $T_{\text{уст}} = 36\,^\circ\text{C}$ — установившаяся температура, Δt — малый промежуток времени.



Поясняющий рисунок: в бак втекает μ граммов в секунду воды при $T_1 = 20\,^\circ C$; когда бак полон, столько же вытекает сверху при температуре бака T.

1. Начало нагрева — масса m_0. Рассмотрим малый промежуток Δt сразу после включения. Вода ещё не вытекает; добавившаяся масса $\mu\Delta t$ имеет ту же температуру $20\,^\circ\text{C}$ и тепла не отнимает (при $t = 0$ температуры бака и притока равны). Уравнение теплового баланса: тепло от нагревателя идёт на нагрев воды в баке,

$$P\,\Delta t = c\,m_0\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{P}{c\,\dfrac{\Delta T}{\Delta t}}.$$

Отношение $\Delta T/\Delta t$ при $t = 0$ — наклон касательной к графику в начале. Касательная проходит через $(0;\ 20\,^\circ\text{C})$ и примерно через $(10\text{ с};\ 24{,}5\,^\circ\text{C})$ (рисунок 3):

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{4{,}5}{10} = 0{,}45\ \text{К/с}, \qquad m_0 = \frac{2000}{4200 \cdot 0{,}45} \approx 1{,}1\ \text{кг}.$$

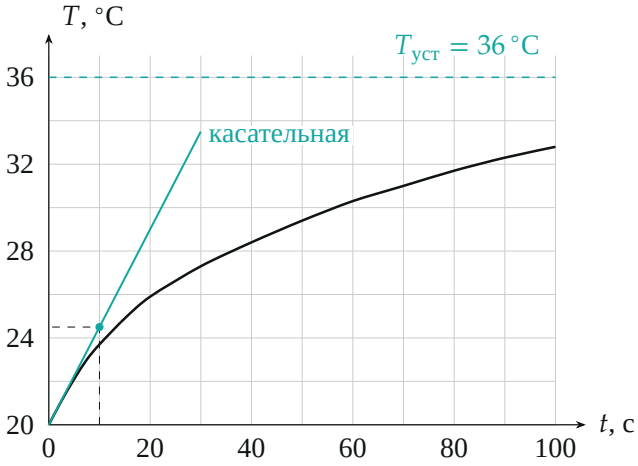
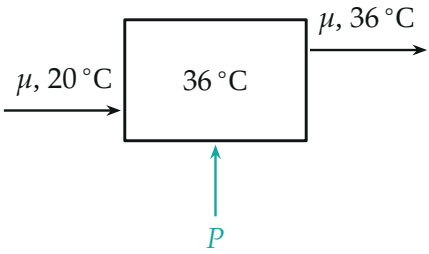


График из условия, касательная в начале (наклон 0,45 К/с) и уровень, к которому стремится температура.

2. Установившийся режим — расход μ. Когда температура перестала меняться, внутренняя энергия воды в баке постоянна. Тогда за время Δt всё тепло нагревателя уносит вытекающая вода: втекла масса $\mu\Delta t$ при T_1, вытекла такая же при $T_{уст}$. Уравнение теплового баланса:

$$P\,\Delta t = c\,\mu\,\Delta t\,(T_{уст} - T_1) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{P}{c\,(T_{уст} - T_1)},$$

$$\mu = \frac{2000}{4200 \cdot 16} \approx 0{,}030 \text{ кг/с} = 30 \text{ г/с}.$$



Установившийся режим: мощность P целиком уходит на нагрев протекающей воды от 20 до 36 °C.

3. Проверка по всему графику. Пока бак не полон, воды в нём $m_0 + \mu t$, и вся энергия нагревателя идёт в эту воду (приток при 20 °C в отсчёте от 20 °C энергии не несёт):

$$c\,(m_0 + \mu t)(T - T_1) = Pt \quad \Rightarrow \quad T - T_1 = \frac{Pt}{c\,(m_0 + \mu t)}.$$

При найденных m_0 и μ это даёт $T(10\text{ с}) \approx 23{,}5\,^\circ\text{C}$, $T(50\text{ с}) \approx 29{,}3\,^\circ\text{C}$ — как на графике (23,7 и 29,4). При $t \to \infty$ дробь стремится к $P/(c\mu) = 16$ K — тот же предел 36 °C. Два независимых куска графика согласованы.

Обратите внимание. Наклон берём именно в начале: позже приток холодной воды уже отнимает тепло, и кривая становится положе. Касательную проводят по первым секундам графика, а не по хорде от 0 до 10 с (хорда даёт 0,37 K/с и завышенную массу 1,3 кг).

Ответ. $m_0 = \dfrac{P}{c\,(\Delta T/\Delta t)_0} \approx 1{,}1$ кг, $\mu = \dfrac{P}{c\,(T_{\text{уст}} - T_1)} \approx 30$ г/с.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Вт}}{\text{Дж/(кг}\cdot\text{K)}\cdot\text{K/с}} = \text{кг}$, $\dfrac{\text{Вт}}{\text{Дж/(кг}\cdot\text{K)}\cdot\text{K}} = \text{кг/с}$. Смысл: мощность 2 кВт успевает нагреть на 16 K только 30 г воды в секунду; бак в 1,1 кг нагрелся бы на 0,45 K за секунду.

Ответ. $m_0 \approx 1{,}1$ кг; $\mu \approx 30$ г/с.