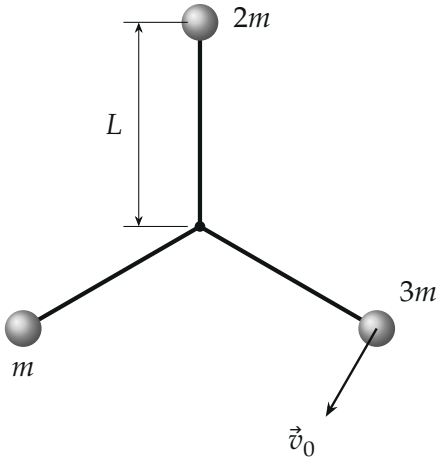
Три шарика на шарнире

Задача 4. [Курчатов 2021/22, 9 класс, задача 4] На концах трёх жёстких невесомых стержней длиной $L = 12$ см каждый закреплены три одинаковых по размеру маленьких шарика массами m, $2m$ и $3m$, где $m = 110$ г. Противоположные концы стержней соединены между собой в одной точке, вокруг которой они могут свободно вращаться. Первоначально вся система неподвижно лежит на гладкой горизонтальной поверхности; все углы между соседними стержнями равны $2\pi/3$. Коротким ударом шарику массой $3m$ сообщают скорость $v_0 = 4$ м/с, направленную перпендикулярно соответствующему стержню и параллельно поверхности. Найдите ускорения всех трёх шариков сразу после удара, считая их отличными от нуля.

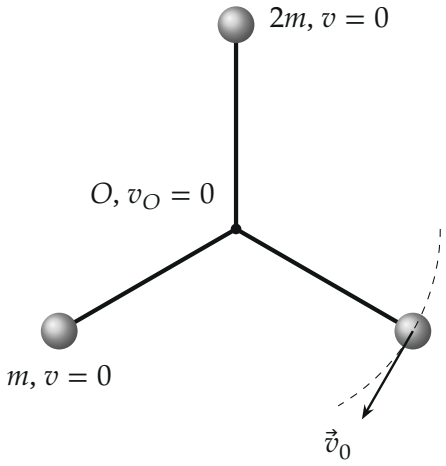


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на динамику связанных тел и движение по окружности. Сразу после удара двигается только шарик $3m$, и его стержень обязан поворачиваться вокруг точки соединения — шарику нужно центростремительное ускорение v_0^2/L. Его даёт натяжение стержня. Но стержни невесомы и соединены шарнирно, поэтому силы натяжения всех трёх стержней в точке соединения уравновешены и равны по модулю. Значит, натянутые стержни дёргают и два неподвижных шарика, и точка соединения сама начинает ускоряться. Ключевые

законы: второй закон Ньютона для каждого шарика и для невесомого шарнира, плюс условие нерастяжимости стержней в ускорениях.

Обозначения. O — точка соединения; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы вдоль стержней от O к шарикам m, $2m$, $3m$; T — сила натяжения стержня (тянет шарик к O); $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — ускорения шариков, $\vec{a}_O$ — ускорение точки O; $u = v_0^2/L$.

1. Скорости сразу после удара. Удар короткий, стержни невесомые и на шарнире: стержень передаёт силу только вдоль себя. Удар по шарику $3m$ перпендикулярен его стержню, поэтому стержни ничего не передают, и шарики m, $2m$ остаются в покое. Длина стержня не меняется, значит, скорости концов вдоль стержня равны: $(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \cdot \vec{e}_i = 0$. Для неподвижных шариков 1 и 2 это $\vec{v}_O \cdot \vec{e}_1 = 0$ и $\vec{v}_O \cdot \vec{e}_2 = 0$; векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не параллельны — значит, $\vec{v}_O = 0$ (рисунок 2). Шарик $3m$ движется со скоростью v_0 по окружности радиуса L вокруг неподвижной в этот момент точки O.



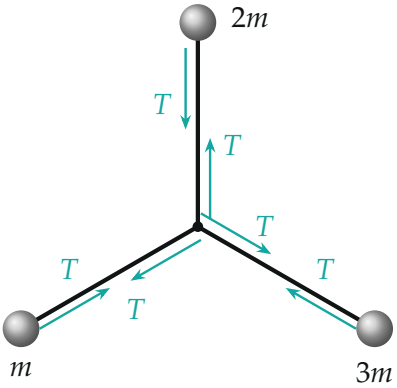
Сразу после удара: двигается только шарик $3m$, перпендикулярно своему стержню; точка O и шарики m, $2m$ неподвижны. Пунктир — дуга окружности радиуса L вокруг O.

2. Шарнир. Точка O невесома: по второму закону Ньютона $0 \cdot \vec{a}_O = \sum \vec{F}$, сумма сил стержней на неё равна нулю. Каждый натянутый стер-

жень тянет O к своему шарику, сила $T_i\vec{e}_i$:

$$T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3 = 0.$$

Три вектора под углами 120° друг к другу складываются в ноль, только если их модули равны: $T_1 = T_2 = T_3 = T$ (рисунок 3). Ещё одно следствие симметрии: $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$.



Силы натяжения: на шарнир O (у центра) — к шарикам, на каждый шарик — к O. Сумма сил на невесомый шарнир равна нулю, поэтому все три силы равны T.

3. Шарики. Второй закон Ньютона для шарика i массой m_i: на него в горизонтальной плоскости действует только стержень,

$$m_i\vec{a}_i = -T\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_i = -\frac{T}{m_i}\vec{e}_i.$$

Ускорение каждого шарика направлено вдоль его стержня к O и обратно пропорционально массе: $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 6 : 3 : 2$.

4. Связь ускорений. Длина стержня постоянна: $(\vec{r}_i - \vec{r}_O)^2 = L^2$. Продифференцируем дважды по времени:

$$(\vec{a}_i - \vec{a}_O) \cdot \vec{e}_i = -\frac{|\vec{v}_i - \vec{v}_O|^2}{L}.$$

Справа — центростремительное ускорение относительного движения: у шариков 1, 2 оно ноль (скорости ноль), у шарика 3 равно $u = v_0^2/L$. Подставим $\vec{a}_i \cdot \vec{e}_i = -T/m_i$:

$$\vec{a}_O \cdot \vec{e}_1 = -\frac{T}{m}, \qquad \vec{a}_O \cdot \vec{e}_2 = -\frac{T}{2m}, \qquad \vec{a}_O \cdot \vec{e}_3 = u - \frac{T}{3m}.$$

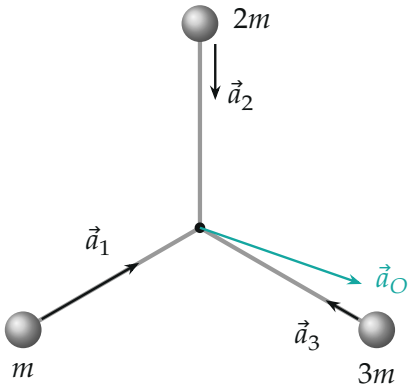
5. Решение. Сложим три равенства. Слева $\vec{a}_O \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 0$:

$$0 = u - \frac{T}{m}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = u - \frac{11}{6}\,\frac{T}{m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{6}{11}\,\frac{mv_0^2}{L}.$$

Ускорения шариков $a_i = T/m_i$:

$$a_1 = \frac{6}{11}\,\frac{v_0^2}{L}, \qquad a_2 = \frac{3}{11}\,\frac{v_0^2}{L}, \qquad a_3 = \frac{2}{11}\,\frac{v_0^2}{L}.$$

Числа: $u = \dfrac{4^2}{0{,}12} \approx 133$ м/с^2, $a_1 \approx 73$ м/с^2, $a_2 \approx 36$ м/с^2, $a_3 \approx 24$ м/с^2 (рисунок 4). У организаторов в ответе 7,3; 3,6; 2,4 м/с^2 — опечатка в порядке величины, их собственная формула $\frac{6}{11}\frac{v_0^2}{L}$ даёт 73 м/с^2.



Ускорения сразу после удара, длины в масштабе 6 : 3 : 2. Бирюзовое — ускорение точки соединения $a_O = \dfrac{2\sqrt{21}}{11}\,\dfrac{v_0^2}{L} \approx 111$ *м/с*^{2}.

Обратите внимание. Ускорение шарика $3m$ — не v_0^2/L: точка O сама ускоряется, и v_0^2/L — ускорение шарика *относительно* O вдоль стержня. Касательное ускорение шариков равно нулю: стержень толкает или тянет только вдоль себя.

Ответ. $a_i = \dfrac{T}{m_i}$, $T = \dfrac{6}{11}\dfrac{mv_0^2}{L}$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{(\text{м/с})^2}{\text{м}} = \text{м/с}^2$. Найдём $\vec{a}_O$ из первых двух равенств пункта 4 (ось x — направо, y — вверх, $\vec{e}_2 = (0;1)$, $\vec{e}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$): $a_{Oy} = -\frac{3}{11}u$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{Ox} + \frac{3}{22}u = -\frac{6}{11}u$, откуда $a_{Ox} = \frac{5\sqrt{3}}{11}u \approx 0{,}787u$. Тогда третье: $\vec{a}_O \cdot \vec{e}_3 = 0{,}787 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2}u = \frac{9}{11}u$, и $u - \frac{T}{3m} = u - \frac{2}{11}u = \frac{9}{11}u$ — сходится. Предел: шарики m, $2m$ бесконечно тяжёлые — O стоит, $a_3 = v_0^2/L$; у нас они «уступают», и a_3 меньше.

Смысл: удар по одному шарику сразу дёргает все три — через натяжение стержней, одинаковое у всех; лёгкий шарик ускоряется сильнее всех.

Ответ. $a_1 = \dfrac{6v_0^2}{11L} \approx 73$ м/с^2 (шарик m), $a_2 = \dfrac{3v_0^2}{11L} \approx 36$ м/с^2 ($2m$), $a_3 = \dfrac{2v_0^2}{11L} \approx 24$ м/с^2 ($3m$); все направлены вдоль стержней к точке соединения.