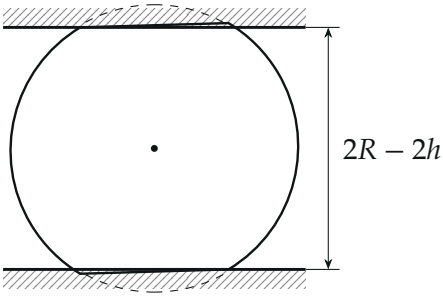
Деформация футбольного мяча

Задача 5. [Курчатов 2021/22, 9 класс, задача 5] Рассмотрим футбольный мяч, заполненный воздухом. Избыточное давление внутри мяча $\Delta p = 20$ кПа, радиус мяча $R = 10$ см и его масса $m = 400$ г. Можно пренебречь зависимостью избыточного давления от деформации шара и массы внутри шара. Материал, из которого сделан мяч, не растягивается.

1. Мяч зажали между двумя параллельными жесткими пластинами, расстояние между которыми равно $2R - 2h$ (так, что глубина деформации, на которую продавливается мяч, с каждой из двух сторон мяча равна $h = 1$ см). Найдите силу, с которой мяч давит на пластину.
2. Мяч движется со скоростью $v_0 = 2$ м/с и ударяется о твердую стенку. Найти максимальную глубину деформированного участка h и время столкновения t. Считайте, что искомая величина h значительно меньше радиуса мяча R.



Поясняющий рисунок к пункту 1: мяч между пластинами, вне пятен контакта оболочка остаётся сферой радиуса R (пунктир — срезанные «шапочки» высотой h, масштаб h увеличен).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на давление газа и колебания. Оболочка не растягивается, поэтому вне пятна контакта мяч остаётся сферой радиуса R, а у пластины оболочка плоская — плоский круг. Через плоский участок воздух давит на пластину избыточным давлением Δp (атмосферное давит с обеих сторон и сокращается), сила — давление на

площадь пятна. При малой деформации площадь пятна растёт пропорционально h, сила — тоже: мяч ведёт себя как пружина. Удар о стену — половина колебания груза на этой пружине.

Обозначения. r — радиус пятна контакта, $S = \pi r^2$ — его площадь, F — сила давления мяча на пластину (стену), k — эффективная жёсткость мяча.

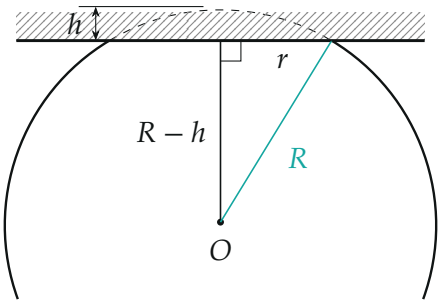
Пункт 1.

1. Сила через пятно. Рассмотрим пластину. На неё со стороны пятна действует воздух мяча через тонкую оболочку с давлением $p_{\text{атм}} + \Delta p$, с другой стороны — атмосфера. Разность даёт

$$F = \Delta p\, S = \Delta p\, \pi r^2.$$

2. Радиус пятна. Пятно — круг, по которому плоскость пластины режет сферу радиуса R на расстоянии $R - h$ от центра (рисунок 2). Теорема Пифагора в прямоугольном треугольнике «центр — центр пятна — край пятна»:

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = h\,(2R - h).$$



Сечение у пластины: гипотенуза R, катеты $R-h$ и радиус пятна r. Пунктир — «шапочка», которой не стало.

3. Числа.

$$F = \pi\, \Delta p\, h\,(2R - h) = \pi \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}19 \approx 120\ \text{Н}.$$

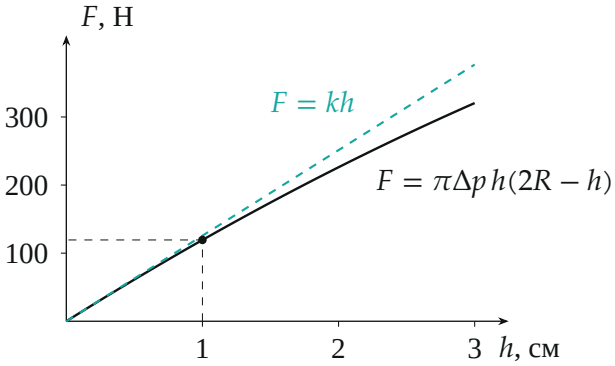
Масса мяча сюда не входит: мяч лежит между пластинами в равновесии, и для силы важна только площадь пятна.

Пункт 2.

4. Мяч как пружина. У стены пятно одно, его глубина $h \ll R$. Тогда в $r^2 = h(2R - h)$ отбросим h^2 по сравнению с $2Rh$:

$$F \approx 2\pi R\,\Delta p \cdot h = kh, \qquad k = 2\pi R\,\Delta p = 2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10^4 \approx 1{,}26 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

Сила пропорциональна деформации — закон Гука с жёсткостью k (рисунок 3; при $h = 1$ см линейная формула ошибается на 5 %).

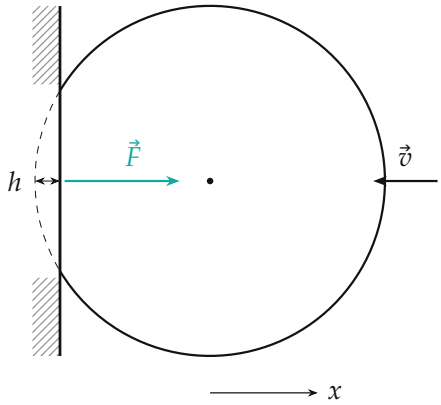


Сила давления мяча на пластину: точная формула (чёрная) и закон Гука при $h \ll R$ (бирюзовая). Точка — ответ пункта 1, $h = 1$ см, $F \approx 120$ Н.

5. Глубина деформации. Стенка твёрдая, трения и потерь нет; сила со стороны стены — упругая. Закон сохранения механической энергии мяча от касания до максимального сжатия (скорость центра в этот момент ноль):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kh^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = v_0\sqrt{\frac{m}{2\pi R\,\Delta p}},$$

$$h = 2\sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}26 \cdot 10^4}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$



Удар о стенку: у стенки плоское пятно, остальная оболочка — сфера. Сила стенки $\vec{F} = kh$ направлена от стенки и тормозит мяч.

6. Время удара. Второй закон Ньютона для мяча в проекции на ось x от стенки, h — деформация: $m\ddot{h} = -kh$. Это гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Мяч касается стенки при $h = 0$, сжимается и отходит при $h = 0$ — проходит половину колебания:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R\,\Delta p}} = \pi\sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}26\cdot 10^4}} \approx 1{,}8\cdot 10^{-2}\text{ с}.$$

Обратите внимание. Сила давления — не $\Delta p \cdot 4\pi R^2$ и не на «шапочку»: давление действует на пластину только через плоский участок. И время удара от скорости не зависит — как период пружинного маятника от амплитуды.

Ответ. 1) $F = \pi\Delta p\, h(2R - h) \approx 120$ Н; 2) $h = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2\pi R\Delta p}} \approx 11$ мм, $t = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2\pi R\Delta p}} \approx 18$ мс.

Проверка. Размерность: Па $\cdot$ м^2 = Н; $\sqrt{\dfrac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{Па}}} = \sqrt{\dfrac{\text{кг}}{\text{Н/м}}}$ = с, умноженное на м/с даёт метры. Применимость: $h = 1{,}1$ см $\ll R = 10$ см — приближение законно. Второй способ для t: средняя скорость при сжатии порядка $v_0/2$, путь h — время сжатия $\sim 2h/v_0 = 11$ мс, полное

время порядка 20 мс — тот же порядок.

Смысл: накачанный мяч — «пружина» жёсткостью около 13 кН/м, удар длится около 0,02 с.

Ответ. 1) $F = \pi \Delta p\, h(2R - h) \approx 120$ Н; 2) $h \approx 11$ мм, $t \approx 18$ мс.