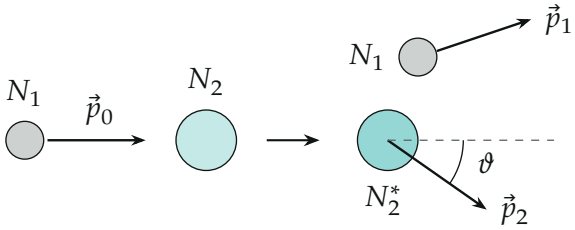
Возбуждение ядра при столкновении

Задача 1. [Курчатов 2022/23, 10 класс, задача 1] Ядро N_1 сталкивается с первоначально покоящимся ядром N_2 и возбуждает его: $N_1 + N_2 \to N_1 + N_2^*$. При этом внутренняя энергия ядра N_2 увеличивается на положительную величину ΔE. Отношение масс ядер N_1 и N_2 равно $n = m_1/m_2 = 1/3$. Отношение энергии ΔE к начальной кинетической энергии K_0 ядра N_1 равно $x = \Delta E/K_0 = 2/5$. Найдите максимально возможное значение ϑ_m угла вылета возбуждённого ядра N_2^*, совместимое с законами сохранения импульса и энергии (угол вылета — угол между импульсом ядра N_2^* и начальным импульсом ядра N_1).



Поясняющий рисунок: до столкновения и после; ϑ — угол вылета возбуждённого ядра.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на неупругое столкновение: часть кинетической энергии уходит во внутреннюю энергию ядра. Законы сохранения импульса (векторный) и энергии (с учётом ΔE) связывают импульсы после удара; не любые направления вылета им совместимы. Угол ограничен условием существования решения — действительного положительного модуля импульса p_2.

Обозначения. $\vec{p}_0$ — начальный импульс N_1; $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ — импульсы N_1 и N_2^* после удара; $y = p_2/p_0$; кинетическая энергия ядра $K = \dfrac{p^2}{2m}$.

1. Закон сохранения энергии. Внутренняя энергия N_2 выросла на ΔE, остальное — кинетическая:

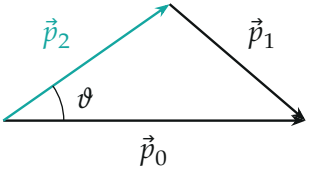
$$\frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \Delta E.$$

Делим на $K_0 = \dfrac{p_0^2}{2m_1}$:

$$1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + n\,y^2 + x.$$

2. Закон сохранения импульса системы двух ядер (внешних сил нет): $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ — векторы образуют треугольник (рисунок 2). Теорема косинусов для стороны p_1, лежащей против угла ϑ:

$$p_1^2 = p_0^2 + p_2^2 - 2p_0p_2\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 = 1 + y^2 - 2y\cos\vartheta.$$



Треугольник импульсов: $\vec{p}_0 = \vec{p}_2 + \vec{p}_1$.

3. Уравнение для y. Подставляем $(p_1/p_0)^2$ в закон сохранения энергии:

$$1 = 1 + y^2 - 2y\cos\vartheta + ny^2 + x \quad \Rightarrow \quad (n+1)y^2 - 2y\cos\vartheta + x = 0.$$

4. Когда решение существует. Корни квадратного уравнения

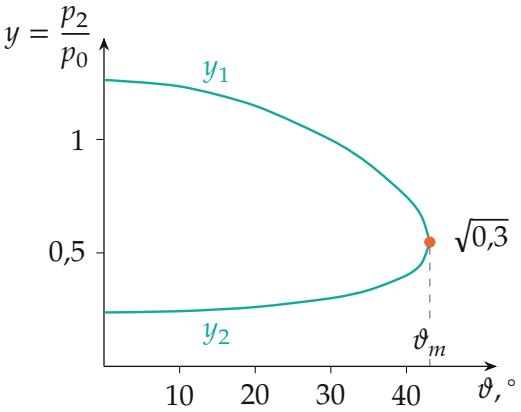
$$y_{1,2} = \frac{\cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta - (n+1)x}}{n+1}$$

действительны, если дискриминант неотрицателен: $\cos^2\vartheta \geq (n+1)x$. Кроме того, $y > 0$. Произведение корней $\dfrac{x}{n+1} > 0$ — корни одного знака, их сумма $\dfrac{2\cos\vartheta}{n+1}$; при $\cos\vartheta < 0$ оба корня отрицательны. Значит, угол острый и

$$\cos\vartheta \geq \sqrt{(n+1)x}.$$

Наибольший угол — при равенстве (оба корня сливаются, рисунок 3):

$$\cos\vartheta_m = \sqrt{(n+1)x} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{8}{15}} = 0{,}730 \quad\Rightarrow\quad \vartheta_m = 43^\circ.$$



Корни $y_{1,2}(\vartheta)$ при $n = 1/3$, $x = 2/5$ (посчитаны по формуле): две ветви сливаются при $\vartheta_m = 43{,}1^\circ$, правее решений нет.

5. Второй способ — геометрический. Отложим $\vec{p}_2$ от начала $\vec{p}_0$, координаты его конца $X = y\cos\vartheta$, $Y = y\sin\vartheta$ (в единицах p_0). Уравнение из п. 3 принимает вид

$$(n+1)(X^2+Y^2) - 2X + x = 0,$$

или после выделения полного квадрата

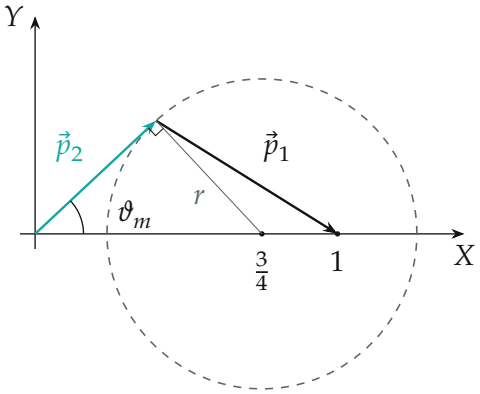
$$\left(X - \frac{1}{n+1}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{x}{n+1}.$$

Конец $\vec{p}_2$ лежит на окружности с центром $c = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{3}{4}$ и радиусом $r = \sqrt{\dfrac{9}{16} - \dfrac{3}{10}} = 0{,}512$. Наибольший угол даёт касательная из начала

координат (рисунок 4):

$$\sin\vartheta_m = \frac{r}{c} = 0{,}683, \qquad \vartheta_m = 43^\circ,$$

то же самое, что в п. 4: $\cos^2\vartheta_m = 1 - \dfrac{r^2}{c^2} = (n+1)x$.



Конец вектора $\vec{p}_2$ (в единицах p_0) может лежать только на пунктирной окружности; предельное направление — касательная, радиус в точке касания ей перпендикулярен.

Обратите внимание. Угол ϑ_m не зависит от модулей: только от отношения масс и доли энергии, ушедшей на возбуждение. При $(n+1)x > 1$ уравнение не имеет решений ни при каком угле — энергии столкновения не хватает, чтобы возбудить ядро (в системе центра масс доступна лишь доля $\frac{1}{n+1}$ от K_0).

Ответ: $\vartheta_m = \arccos\sqrt{(n+1)x} = \arccos\sqrt{8/15} \approx 43^\circ$.

Проверка. Предел $x \to 0$ (упругий удар): $\cos\vartheta_m \to 0$, $\vartheta_m \to 90^\circ$ — покоившееся ядро после упругого удара не может полететь назад, угол до 90°; так и есть. Предел $(n+1)x = 1$: $\vartheta_m = 0$, порог возбуждения — ядра после удара летят вместе вперёд. Числа: $(n+1)x = 0{,}533 < 1$, порог не превышен.

Ответ. $\vartheta_m = \arccos\sqrt{(n+1)x} = \arccos\sqrt{8/15} \approx 43^\circ$.