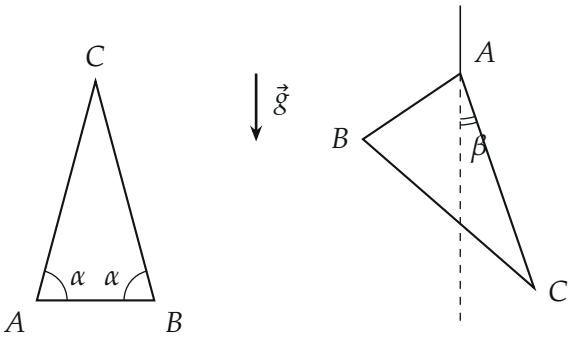
Треугольник из проволоки на нити

Задача 2. [Курчатов 2022/23, 10 класс, задача 2] Из тонкой однородной проволоки согнут равнобедренный треугольник ABC. Углы при основании AB равны $\alpha = 75°$. Треугольник подвешен на тонкой нити за вершину A и находится в равновесии. Найдите угол β между направлением нити и боковой стороной AC.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тела, подвешенного в одной точке. Тело на нити висит так, что его центр масс находится на одной вертикали с точкой подвеса (иначе сила тяжести создаёт момент относительно A). Значит, нужно найти центр масс проволочного треугольника и угол между AC и прямой AH, где H — центр масс. Масса распределена по сторонам, а не по площади, поэтому центр масс — не точка пересечения медиан.

Обозначения. a — длина боковой стороны, m — её масса; D — середина основания AB; E, F — середины сторон AC и BC; G — середина отрезка EF; H — центр масс треугольника.

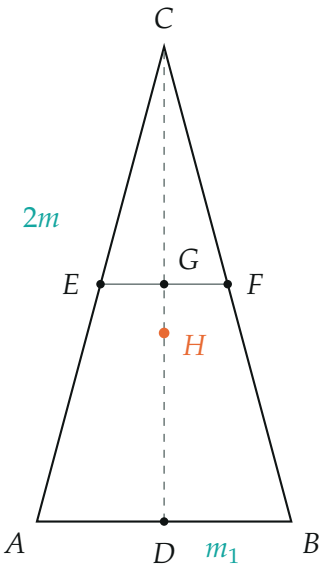
1. Массы сторон. Проволока однородная, масса стороны пропорциональна длине. Высота и основание:

$$CD = a\sin\alpha, \qquad AB = 2a\cos\alpha, \qquad m_1 = m_{AB} = 2m\cos\alpha.$$

2. Замена сторон точечными массами. Центр масс однородного отрезка — его середина. Основание заменяем массой m_1 в точке D, боковые стороны — массами m в точках E и F. Две равные массы в E и F

заменяем одной $m_2 = 2m$ в середине G отрезка EF. Средняя линия EF делит высоту CD пополам, поэтому G лежит на CD и $DG = \frac{1}{2}CD$ (рисунок 2). Центр масс H двух точек лежит на отрезке DG и делит его в отношении, обратном массам:

$$\frac{GH}{DH} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2m\cos\alpha}{2m} = \cos\alpha.$$



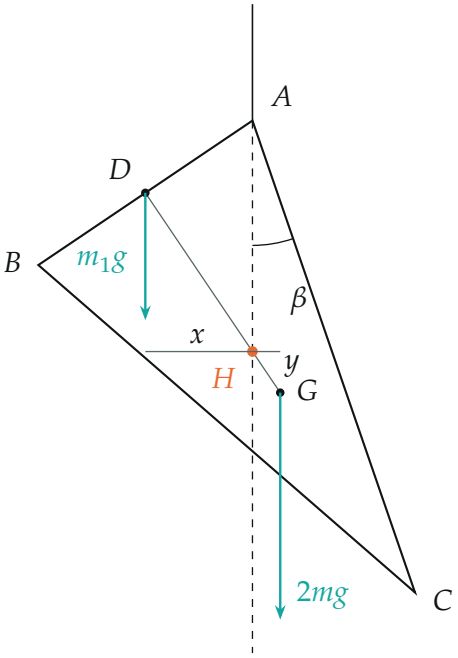
Стороны заменены точечными массами: основание — m_1 в D, боковые — m в E и F, вместе — $2m$ в G. Центр масс H — на DG, ближе к G.

3. Положение центра масс. Из отношения и условия $DH + GH = DG = \frac{a}{2}\sin\alpha$:

$$DH(1+\cos\alpha) = \frac{a}{2}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad DH = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}.$$

4. Условие равновесия. На треугольник действуют сила натяжения нити (приложена в A) и силы тяжести. Правило моментов относительно оси через A, перпендикулярной плоскости треугольника: момент нити

нулевой, поэтому суммарный момент сил тяжести $m_1\vec{g}$ (в D) и $m_2\vec{g}$ (в G) должен быть нулевым — их плечи x и y относительно вертикали через A обратно пропорциональны массам: $xm_1 = ym_2$ (рисунок 3). Это и значит, что H на вертикали через A: прямая AH — продолжение нити.



Висящий треугольник (построен по вычисленным координатам): силы тяжести m_1g и $2mg$, их плечи x и y относительно вертикали через A; центр масс H — на нити.

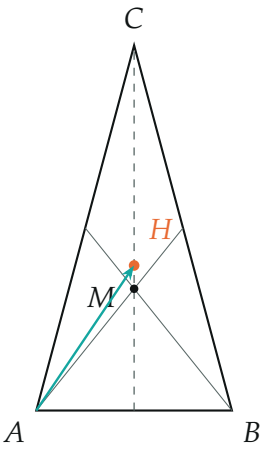
5. Угол. В исходном положении треугольника (рисунок 2) прямоугольный треугольник ADH: $AD = \dfrac{AB}{2} = a\cos\alpha$, угол DAH равен $\alpha - \beta$ (угол $DAC = \alpha$ минус угол $HAC = \beta$):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{DH}{AD} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{3{,}732}{2\cdot 1{,}259} = 1{,}482,$$

откуда $\alpha - \beta = 56{,}0^\circ$ и

$$\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = 75^\circ - 56^\circ = 19^\circ.$$

Обратите внимание. Центр масс проволочного треугольника — не точка пересечения медиан: там центр масс сплошной треугольной пластины ($DH = CD/3$). Такая ошибка дала бы $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\alpha/3$ и $\beta = 24°$ (рисунок 4). Совпадают ответы только для равностороннего треугольника ($\alpha = 60°$: $\frac{\operatorname{tg}60°}{2\cdot1{,}5} = \frac{\operatorname{tg}60°}{3}$).



Центр масс проволоки H выше точки пересечения медиан M (центр масс пластины): $DH = 0{,}384a$, $DM = 0{,}322a$. Нить идёт вдоль AH (бирюза).

Ответ: $\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \approx 19°$.

Проверка. Второй способ — координаты: начало в A, ось x вдоль AB; середины сторон D, E, F с массами $2m\cos\alpha$, m, m (у D высота нуль, у E и F — $\frac{a}{2}\sin\alpha$):

$$y_H = \frac{2\cdot m\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha}{2m\cos\alpha+2m} = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}, \qquad x_H = a\cos\alpha$$

— то же DH. Численно $\beta = 19{,}0°$ (python). Предел $\alpha \to 90°$ (очень узкий треугольник): основание исчезает, $AD \to 0$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) \to \infty$, $\beta \to 0$ — нить идёт вдоль двух слипшихся боковых сторон, как и должно быть.

Ответ. $\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \approx 19°$.