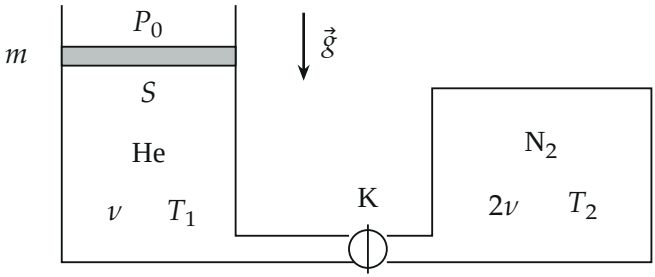
Гелий и азот: кран между цилиндром и сосудом

Задача 3. [Курчатов 2022/23, 10 класс, задача 3] В вакуумной камере большого объёма поддерживается постоянное давление $P_0 = 6$ кПа. В камере расположен открытый сверху вертикальный цилиндр, в котором может свободно двигаться поршень массой $m = 4$ кг и площадью $S = 100$ см^2. Цилиндр соединён с сосудом постоянного объёма короткой трубкой с краном K. В начальном состоянии кран закрыт, в цилиндре под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 570$ K, а в сосуде — молекулярный азот N_2 при температуре $T_2 = 380$ K. Давления гелия и азота одинаковы, число молей гелия $\nu = 0{,}025$, число молей азота 2ν. Кран открывают, газы начинают перемешиваться, и вся система переходит в новое равновесное состояние. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите следующие величины:



1. конечную температуру T газовой смеси,
2. расстояние x, на которое переместился поршень. Числовой ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·K), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Объём трубки с краном не учитывайте.

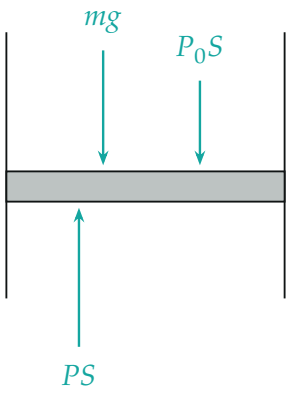
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для смеси газов в теплоизолированной системе с подвижным поршнем. Давление под поршнем в любом равновесном состоянии задаёт сам поршень, поэтому оно в конце такое же, как в начале. Горячий гелий и холодный азот перемешиваются и приходят к общей температуре; при этом общий объём газа меняется, и поршень совершает работу.

Внутренняя энергия смеси — сумма энергий одноатомного гелия ($\frac{3}{2}RT$ на моль) и двухатомного азота ($\frac{5}{2}RT$ на моль).

Обозначения. P — давление газов (начальное и конечное); $V_1 = Sh_1$ — начальный объём гелия, V — объём сосуда; $V_2 = Sh_2$ — объём смеси в цилиндре в конце; A — работа газов над поршнем; $x = h_1 - h_2$.

1. Давление. Второй закон Ньютона для покоящегося поршня в проекции на вертикаль (рисунок 2): газ давит снизу силой PS, сверху — давление камеры P_0S и сила тяжести mg:

$$PS = P_0S + mg \quad \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{mg}{S} = 6\text{ кПа} + 4\text{ кПа} = 10\text{ кПа}.$$



Силы на поршень в равновесии.

2. Уравнения состояния. Уравнение Менделеева — Клапейрона для гелия и азота до открытия крана и для смеси в конце (закон Дальтона: давление смеси — сумма парциальных, уравнение для смеси — с полным числом молей 3ν):

$$PV_1 = \nu RT_1, \qquad PV = 2\nu RT_2, \qquad P(V_2 + V) = 3\nu RT.$$

3. Работа газа. Теорема о кинетической энергии для поршня: он покоится в начале и в конце, поэтому сумма работ всех сил на него нулевая. Сила давления газа совершает работу A, давление камеры — $P_0S(h_1 -$

h_2), сила тяжести — $mg(h_1 - h_2)$ (поршень опускается):

$$A + (P_0S + mg)(h_1 - h_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = (P_0S + mg)(h_2 - h_1) = P(V_2 - V_1).$$

Так работа выражается через начальное и конечное состояния, хотя сам процесс перемешивания неравновесный. С уравнениями п. 2:

$$A = PV_2 - PV_1 = 3\nu RT - 2\nu RT_2 - \nu RT_1.$$

Пункт 1. Первое начало термодинамики для всего газа: тепла нет, $0 = \Delta U + A$:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R(T - T_1) + \frac{5}{2} \cdot 2\nu R(T - T_2) + 3\nu RT - 2\nu RT_2 - \nu RT_1.$$

Умножаем на $\dfrac{2}{\nu R}$:

$$3(T - T_1) + 10(T - T_2) + 6T - 4T_2 - 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 19T = 5T_1 + 14T_2,$$

$$T = \frac{5T_1 + 14T_2}{19} = \frac{5 \cdot 570 + 14 \cdot 380}{19} = 430 \text{ K}.$$

Пункт 2. Смещение поршня:

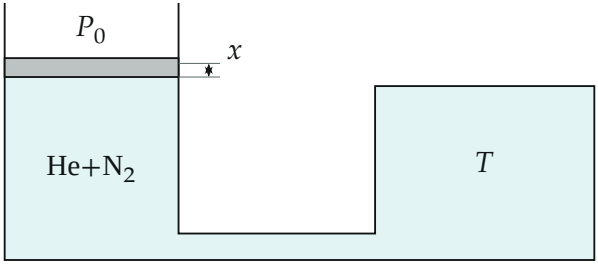
$$x = h_1 - h_2 = \frac{PV_1 - PV_2}{PS}.$$

Из п. 2: $PV_2 = 3\nu RT - 2\nu RT_2 = \dfrac{\nu R(15T_1 + 4T_2)}{19}$, $PV_1 = \nu RT_1$, разность

$$PV_1 - PV_2 = \frac{4\nu R(T_1 - T_2)}{19},$$

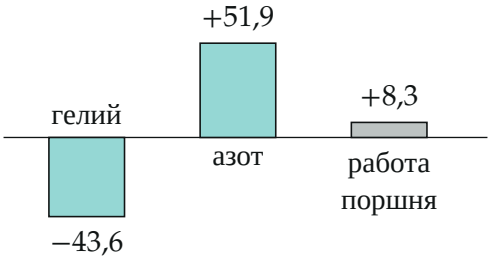
$$x = \frac{4\nu R(T_1 - T_2)}{19(P_0S + mg)} = \frac{4 \cdot 0{,}025 \cdot 8{,}31 \cdot 190}{19 \cdot 100} \text{ м} \approx 8{,}3 \text{ см}.$$

Поршень опустился. Объёмы: $V_1 = 11{,}84$ л ($h_1 = 118{,}4$ см), $V = 15{,}79$ л, $V_2 = 11{,}01$ л ($h_2 = 110{,}1$ см).



Конечное состояние: смесь (3ν молей, температура T) заполняет цилиндр и сосуд; поршень опустился на x (пунктир — прежнее положение).

Обратите внимание. Азот двухатомный: его внутренняя энергия $\frac{5}{2}\cdot 2\nu RT$, а не $\frac{3}{2}$. С $\frac{3}{2}$ вышло бы $15T = 5T_1 + 10T_2$, $T = 443$ К и нулевое смещение поршня.



Баланс энергии в джоулях: гелий отдаёт 43,6 Дж, поршень, опускаясь, совершает над газом работу 8,3 Дж, азот получает 51,9 Дж.

Ответ: 1) $T = \dfrac{5T_1 + 14T_2}{19} = 430$ К; 2) $x = \dfrac{4\nu R(T_1 - T_2)}{19(P_0S + mg)} \approx 8{,}3$ см (поршень опускается).

Проверка. Баланс энергии числами: $\Delta U_{\text{He}} = \frac{3}{2}\cdot 0{,}025\cdot 8{,}31\cdot(-140) = -43{,}6$ Дж, $\Delta U_{\text{N}_2} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}05\cdot 8{,}31\cdot 50 = 51{,}9$ Дж, $A = P(V_2 - V_1) = 10^4\cdot(-0{,}83\cdot 10^{-3}) = -8{,}3$ Дж; сумма $\Delta U + A = 0$. Предел $T_1 = T_2$: $T = T_1$, $x = 0$ — смещение одинаково нагретых газов при постоянном давлении ничего не меняет. Размерность x: Дж/Н = м.

Ответ. 1) $T = \dfrac{5T_1 + 14T_2}{19} = 430$ К; 2) $x = \dfrac{4\nu R(T_1 - T_2)}{19(P_0S + mg)} \approx 8{,}3$ см.