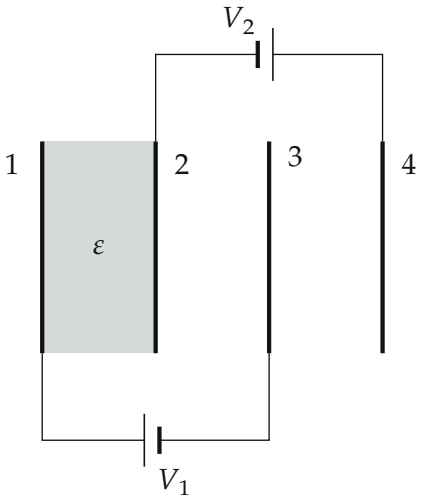
Четыре пластины с диэлектриком и две батареи

Задача 4. [Курчатов 2022/23, 10 класс, задача 4] Четыре одинаковые незаряженные металлические пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Всё пространство между пластинами 1 и 2 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 5$. Пластины 1 и 3 соединяют тонким проводом через батарею с ЭДС $V_1 = 9$ В, а пластины 2 и 4 — через батарею с ЭДС $V_2 = 4{,}5$ В. Найдите отношение $x = q_4/q_1$, где q_4 и q_1 — установившиеся заряды пластин 4 и 1.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на систему плоских конденсаторов, соединённых батареями. Каждая батарея перекачивает заряд между своими пластинами, пары 1–3 и 2–4 в сумме нейтральны. Поле в промежутках — по принципу суперпозиции (или теореме Гаусса), напряжение каждой батареи — сумма напряжений на промежутках между её пластинами. Два линейных уравнения на два заряда.

Обозначения. S — площадь пластин, d — расстояние между соседними; q_i — заряд пластины i, $\sigma_i = q_i/S$; ось x — от пластины 1 к пластине 4; E_{12}, E_{23}, E_{34} — проекции поля на ось x в промежутках; φ_i — потенциалы.

1. Заряды и полярность. Закон сохранения заряда для изолированных пар пластин $1, 3$ и $2, 4$:

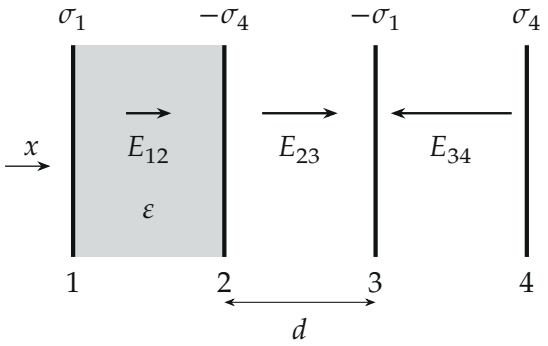
$$q_3 = -q_1, \qquad q_2 = -q_4.$$

По рисунку условия (длинная тонкая черта — плюс): нижняя батарея плюсом к пластине 1, верхняя — плюсом к пластине 4:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = V_1, \qquad \varphi_2 - \varphi_4 = -V_2.$$

2. Поля в промежутках. Каждая пластина — заряженная плоскость с полем $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ по обе стороны. Сумма всех зарядов нулевая, поэтому снаружи системы поле нулевое; по теореме Гаусса поле в промежутке равно суммарной плотности заряда слева от него, делённой на ε_0 (и ещё на ε в диэлектрике):

$$E_{12} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad E_{23} = \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\varepsilon_0}, \qquad E_{34} = \frac{\sigma_1 - \sigma_4 - \sigma_1}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}.$$



Плотности зарядов пластин и поле в промежутках (длины стрелок — по найденным ниже значениям: 3,2; 5,8; 10,3 В на промежуток).

3. Напряжения батарей. Работа поля при переносе пробного заряда e вдоль оси x с пластины 1 на пластину 3 равна $e(\varphi_1 - \varphi_3) = e(E_{12} + E_{23})d$:

$$V_1 = \frac{\sigma_1 d}{\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_4)d}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon + 1)\sigma_1 - \varepsilon\sigma_4 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon V_1}{d}.$$

С пластины 2 на пластину 4:

$$-V_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_4)d}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4 d}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2\sigma_4 - \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 V_2}{d}.$$

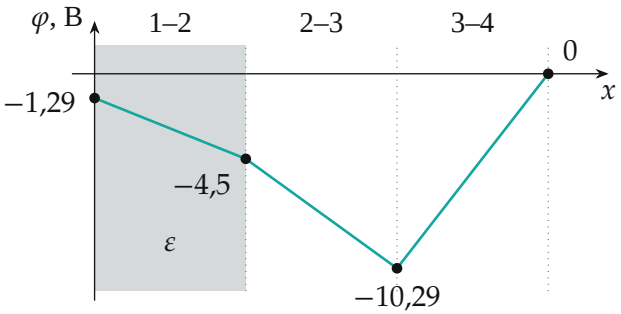
4. Решение системы. Из второго $\sigma_1 = 2\sigma_4 - \dfrac{\varepsilon_0 V_2}{d}$, подставляем в первое:

$$\sigma_4 = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\varepsilon V_1 + (\varepsilon + 1)V_2}{\varepsilon + 2}, \qquad \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\varepsilon(2V_1 + V_2)}{\varepsilon + 2}.$$

Отношение зарядов:

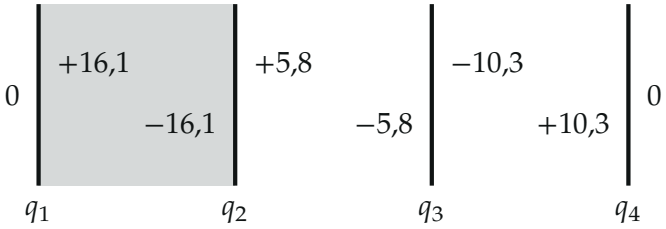
$$x = \frac{q_4}{q_1} = \frac{\varepsilon V_1 + (\varepsilon + 1)V_2}{\varepsilon(2V_1 + V_2)} = \frac{45 + 27}{5 \cdot 22{,}5} = \frac{72}{112{,}5} = 0{,}64.$$

5. Картина потенциала и зарядов. В единицах ε_0/d: $\sigma_1 = 16{,}07$ В, $\sigma_4 = 10{,}29$ В. Напряжения промежутков: $E_{12}d = 3{,}21$ В, $E_{23}d = 5{,}79$ В, $E_{34}d = -10{,}29$ В. При $\varphi_4 = 0$: $\varphi_3 = -10{,}29$ В, $\varphi_2 = -4{,}50$ В, $\varphi_1 = -1{,}29$ В (рисунок 3). Проверяем: $\varphi_1 - \varphi_3 = 9$ В, $\varphi_2 - \varphi_4 = -4{,}5$ В.



Потенциал вдоль системы (по найденным зарядам). Наклон в промежутке — поле: в диэлектрике мал, в промежутке 3–4 направлен против оси.

На поверхностях пластин (рисунок 4) заряды соседних обращённых поверхностей равны по модулю и противоположны по знаку, внешние поверхности не заряжены.



Заряды поверхностей в единицах $\varepsilon_0 S \cdot (1\ В)/d$: $q_1 = 16{,}1$, $q_2 = -10{,}3$, $q_3 = -16{,}1$, $q_4 = 10{,}3$; $q_4/q_1 = 0{,}64$.

Обратите внимание. Верхняя батарея подключена плюсом к пластине 4, поэтому $\varphi_2 - \varphi_4 = -V_2$. С неверным знаком получилось бы $x = \dfrac{\varepsilon V_1 - (\varepsilon+1)V_2}{\varepsilon(2V_1 - V_2)} = 0{,}27$ — совсем другой ответ. Диэлектрик стоит в промежутке 1–2, поэтому делится на ε поле E_{12}, а не E_{34}.

Ответ: $x = \dfrac{\varepsilon V_1 + (\varepsilon+1)V_2}{\varepsilon(2V_1 + V_2)} = 0{,}64$.

Проверка. Предел $V_2 \to 0$ (пластины 2 и 4 соединены проводом): $x = \dfrac{V_1}{2V_1} = \dfrac{1}{2}$ — тогда $\varphi_2 = \varphi_4$, $E_{23}d = -E_{34}d$, $\sigma_1 - \sigma_4 = \sigma_4$, $\sigma_4 = \sigma_1/2$ — верно. Предел $\varepsilon \to \infty$ (промежуток 1–2 как проводник): $x = \dfrac{V_1 + V_2}{2V_1 + V_2}$; прямой счёт с $\varphi_1 = \varphi_2$: $\sigma_1 - \sigma_4 = V_1$, $2\sigma_4 - \sigma_1 = V_2$ (в единицах ε_0/d) даёт то же.

Ответ. $x = \dfrac{\varepsilon V_1 + (\varepsilon+1)V_2}{\varepsilon(2V_1 + V_2)} = 0{,}64$.