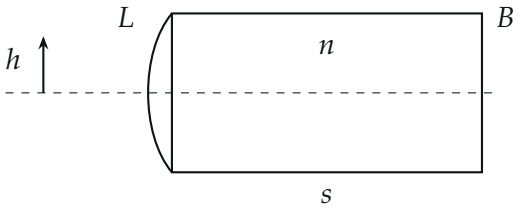
Линза и экран в цилиндре с водой

Задача 5. [Курчатов 2022/23, 10 класс, задача 5] Круговой цилиндр длиной $s = 70$ см закрыт с левого торца тонкой плосковыпуклой линзой L, обращённой плоской стороной внутрь цилиндра. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью цилиндра, фокусное расстояние линзы в воздухе $F = 20$ см. Правый торец цилиндра закрыт экраном B, изготовленным из тонкого матового стекла. Внутри цилиндр заполнен водой. Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1{,}33$. Слева от линзы, перпендикулярно её оптической оси, расположена тонкая светящаяся стрелка высотой $h = 15$ мм. Изображение стрелки получено на матовом экране. Найдите высоту изображения стрелки H. Ответ выразите в миллиметрах и округлите до десятых.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в системе «тонкая линза + плоская граница вода–воздух». Линза собирает лучи так, как будто воды нет, а затем на плоской границе лучи преломляются и идут к оси под меньшими углами — изображение уходит дальше. Сначала из условия «изображение на экране» находим расстояние a от стрелки до линзы (ход луча из основания стрелки), затем высоту H (ход луча через оптический центр).

Обозначения. a — расстояние от стрелки до линзы; f — расстояние, на котором луч из основания стрелки пересёк бы ось без воды; y — высота, на которой луч проходит линзу; α, γ — углы луча с осью в воздухе (за линзой) и в воде. Плоскую сторону линзы и воду мысленно разделим тонким воздушным зазором $\delta \to 0$: тогда линза работает с фокусом F, как в воздухе, а преломление на воду — на плоской границе.

1. Луч из основания стрелки без воды. Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

2. Преломление на границе с водой. Закон преломления для малых углов: $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\gamma\approx\gamma$ (формула линзы и так верна только для малых углов):

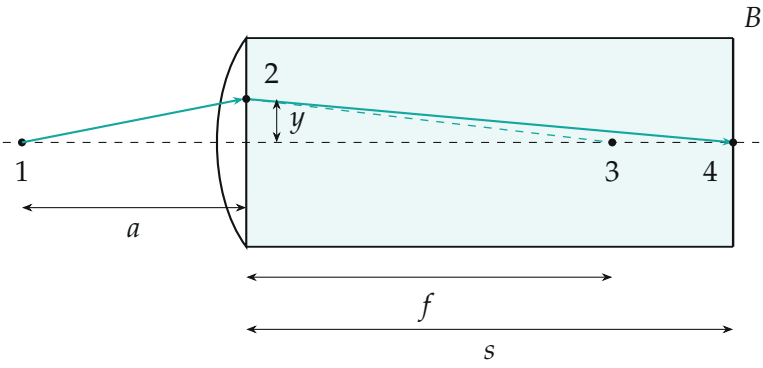
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=n \quad\Rightarrow\quad \alpha=n\gamma.$$

Луч пересекает границу на высоте y и должен прийти на экран в точку оси — там изображение основания (рисунок 2):

$$\alpha\approx\frac{y}{f}, \qquad \gamma\approx\frac{y}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{s}{f}=n, \qquad f=\frac{s}{n}=52{,}6\text{ см}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{F}-\frac{n}{s}=\frac{1}{20}-\frac{1{,}33}{70}=0{,}0310\text{ см}^{-1}, \qquad a=32{,}3\text{ см}.$$



Луч из основания стрелки (1). Без воды он пересёк бы ось в точке 3 (пунктир), в воде идёт положе и приходит в точку 4 на экране. Масштаб по горизонтали — в соотношениях $a:f:s=32{,}3:52{,}6:70$; углы α и γ луча с осью в воздухе и в воде — рисунок 4.

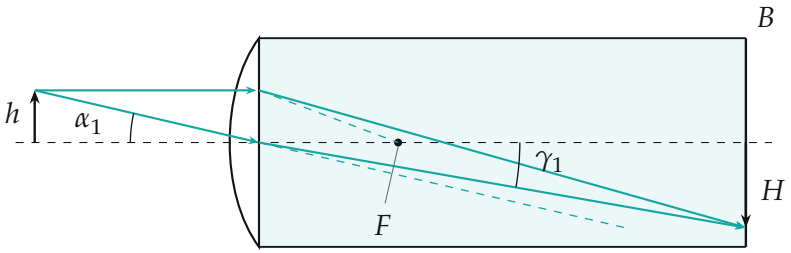
3. Луч из вершины стрелки через оптический центр. Через центр тонкой линзы луч идёт не преломляясь, угол с осью $\alpha_1 = h/a$. На плоской границе он преломляется: $\alpha_1 = n\gamma_1$, и приходит на экран на расстоянии H от оси, $\gamma_1 = H/s$ (рисунок 3):

$$\frac{h}{a} = \frac{nH}{s} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{hs}{na} = \frac{hs}{n}\left(\frac{1}{F} - \frac{n}{s}\right) = h\left(\frac{s}{nF} - 1\right).$$

Числа:

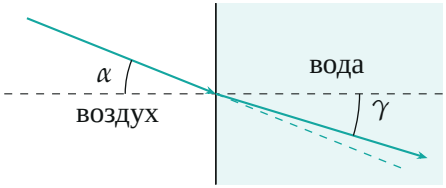
$$H = 15\text{ мм} \cdot \left(\frac{70}{1{,}33 \cdot 20} - 1\right) = 15 \cdot 1{,}632\text{ мм} \approx 24{,}5\text{ мм}.$$

Изображение перевёрнутое.



Лучи из вершины стрелки. Через центр линзы — без преломления до воды, в воде положе (пунктир — как шёл бы без воды). Луч, параллельный оси, шёл бы через фокус F, но в воде приходит в ту же точку экрана — проверка построения.

Обратите внимание. Вода не меняет фокусное расстояние линзы как таковое: плоская поверхность линзы граничит с водой, и всё действие воды сводится к преломлению на плоской границе. Поэтому линзу и воду можно рассматривать по отдельности через зазор $\delta \to 0$.



Преломление на плоской границе воздух–вода: угол с осью (нормалью к границе) уменьшается в n раз, $\alpha = n\gamma$ (углы на рисунке увеличены для наглядности).

Ответ: $H = h\left(\dfrac{s}{nF} - 1\right) \approx 24{,}5$ мм.

Проверка. Второй способ — луч из вершины, параллельный оси (рисунок 3): после линзы он идёт к фокусу под углом h/F, в воде — под углом $h/(nF)$ и на экране оказывается на расстоянии $\dfrac{hs}{nF} - h = h\left(\dfrac{s}{nF} - 1\right)$ ниже оси — тот же ответ. Предел $n = 1$ (воды нет): $H = h(\frac{s}{F} - 1)$ — обычное увеличение линзы $\Gamma = \frac{s}{a}$ при $\frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{s}$. Размерность: мм.

Ответ. $H = h\left(\dfrac{s}{nF} - 1\right) \approx 24{,}5$ мм.