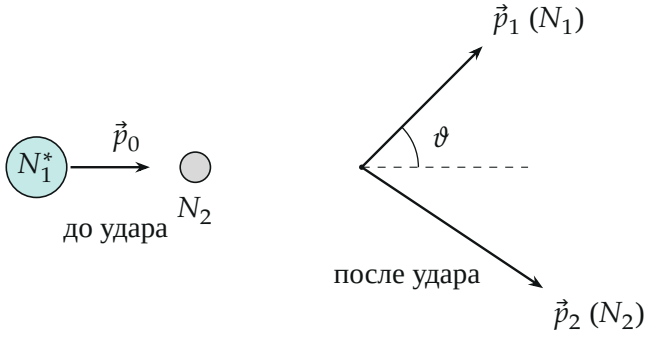
Возбуждённое ядро и покоящееся ядро

Задача 1. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 1] Возбуждённое ядро N_1^* сталкивается с первоначально покоящимся ядром N_2 и переходит в невозбуждённое состояние: $N_1^* + N_2 \to N_1 + N_2$. При этом внутренняя энергия ядра N_1 уменьшается на положительную величину ΔE. Максимально возможное значение угла между импульсами ядер N_1^* и N_1, совместимое с законами сохранения импульса и энергии, равно $\vartheta_m = 45°$. Отношение масс ядер N_1 и N_2 равно $n = m_1/m_2 = 4$. Найдите отношение $x = \Delta E/K_0$ величины ΔE к начальной кинетической энергии K_0 ядра N_1^*.



Поясняющий рисунок: ядро N_1^* налетает на покоящееся N_2; после удара ядро N_1 летит под углом ϑ к первоначальному направлению.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на неупругое столкновение с выделением энергии: при ударе ядро отдаёт внутреннюю энергию ΔE, и кинетическая энергия после удара *больше* начальной. Законы сохранения импульса и энергии не задают угол ϑ однозначно, но ограничивают его: при данном ϑ для модуля p_1 получается квадратное уравнение, и у него есть решения только при не слишком большом угле. Наибольший угол — граница, где дискриминант обращается в ноль.

Обозначения. $\vec{p}_0$ — импульс N_1^* до удара, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ — импульсы N_1 и N_2 после; ϑ — угол между $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$; $K_0 = \frac{p_0^2}{2m_1}$; $y = \frac{p_1}{p_0} > 0$. Масса ядра при

снятии возбуждения меняется ничтожно, m_1 одна и та же: $\Delta E \ll m_1 c^2$, движение нерелятивистское.

1. Закон сохранения энергии. Полная энергия — кинетическая плюс внутренняя. Внутренняя энергия N_1 уменьшилась на ΔE, у N_2 не изменилась:

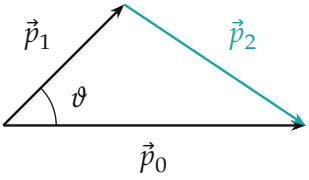
$$\frac{p_0^2}{2m_1} + \Delta E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}.$$

Умножим на $2m_1/p_0^2$, учтём $\frac{m_1}{m_2} = n$ и $\frac{\Delta E}{K_0} = x$:

$$1 + x = y^2 + n\,\frac{p_2^2}{p_0^2}.$$

2. Закон сохранения импульса. Внешних сил нет: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, то есть $\vec{p}_2 = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$ (треугольник импульсов на рисунке 2). По теореме косинусов

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2^2}{p_0^2} = 1 + y^2 - 2y\cos\vartheta.$$



Треугольник импульсов: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

3. Уравнение для y. Подставим $\frac{p_2^2}{p_0^2}$ из пункта 2 в пункт 1:

$$1 + x = y^2 + n\,(1 + y^2 - 2y\cos\vartheta),$$

откуда квадратное уравнение

$$(n+1)\,y^2 - 2n\cos\vartheta\; y + (n - 1 - x) = 0.$$

Угол ϑ возможен, если у этого уравнения есть положительный корень. Четверть дискриминанта должна быть неотрицательной:

$$n^2\cos^2\vartheta - (n+1)(n-1-x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2\sin^2\vartheta \leq 1 + (n+1)\,x.$$

(Мы заменили $n^2\cos^2\vartheta = n^2 - n^2\sin^2\vartheta$ и раскрыли $(n+1)(n-1) = n^2-1$.) При $\cos\vartheta > 0$ сумма корней $\frac{2n\cos\vartheta}{n+1} > 0$, а при $n^2 > 1+(n+1)x$ (у нас $16 > 8$) и их произведение $\frac{n-1-x}{n+1} > 0$ — оба корня положительны, ограничение даёт только дискриминант.

4. Наибольший угол. Неравенство пункта 3 показывает: $\sin\vartheta$ не больше $\frac{\sqrt{1+(n+1)x}}{n}$. Наибольший угол достигается, когда дискриминант равен нулю:

$$\sin^2\vartheta_m = \frac{1+(n+1)\,x}{n^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n^2\sin^2\vartheta_m - 1}{n+1} = \frac{16\cdot\frac{1}{2}-1}{5} = 1{,}4.$$

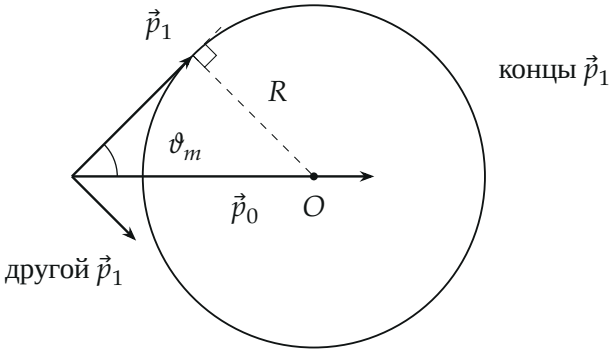
5. Второй способ — геометрия импульсов. Уравнение пункта 3, записанное векторно, $(n+1)p_1^2 - 2n\,\vec{p}_0\cdot\vec{p}_1 + (n-1-x)p_0^2 = 0$, — это окружность: концы всех возможных векторов $\vec{p}_1$ лежат на окружности с центром в точке $\frac{n}{n+1}\vec{p}_0$ и радиусом

$$R = \frac{\sqrt{1+(n+1)x}}{n+1}\,p_0$$

(выделите полный квадрат: $\left|\vec{p}_1 - \frac{n}{n+1}\vec{p}_0\right|^2 = R^2$). Угол ϑ наибольший, когда $\vec{p}_1$ касается окружности (рисунок 3): радиус в точку касания перпендикулярен $\vec{p}_1$, и

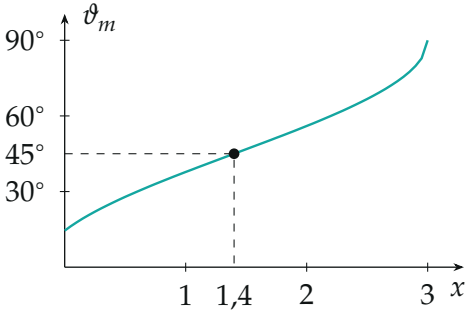
$$\sin\vartheta_m = \frac{R}{\frac{n}{n+1}p_0} = \frac{\sqrt{1+(n+1)x}}{n}$$

— то же, что в пункте 4. При $n = 4$, $x = 1{,}4$: центр в $0{,}8\,p_0$, радиус $\frac{\sqrt{8}}{5}p_0 \approx 0{,}566\,p_0$, касательная — под 45°.



Концы всех разрешённых векторов $\vec{p}_1$ лежат на окружности с центром $O = \frac{n}{n+1}\vec{p}_0$ и радиусом R (масштаб: $p_0 = 4$ см). Наибольший угол — у касательной.

6. Как угол зависит от x. Формула $\sin\vartheta_m = \frac{\sqrt{1+(n+1)x}}{n}$ при $n = 4$ показана на рисунке 4. Без выделения энергии ($x = 0$, упругий удар) $\vartheta_m = \arcsin\frac{1}{4} \approx 14{,}5°$ — известный результат для тяжёлой частицы, налетающей на лёгкую. Чем больше выделилось энергии, тем больше окружность и шире допустимые углы; при $x \geq 3$ ($n^2 \leq 1 + (n+1)x$) начало координат оказывается внутри окружности, и ядро N_1 может полететь в любую сторону.



Наибольший угол вылета ϑ_m от $x = \Delta E/K_0$ при $n = 4$ (по формуле). Условию $\vartheta_m = 45°$ отвечает $x = 1{,}4$.

Обратите внимание. Внутренняя энергия ядра N_1 после удара не равна нулю — она уменьшилась на ΔE; в уравнение энергии входит

только эта разность, а сама внутренняя энергия N_1 сокращается. И $x > 0$: энергия переходит из внутренней в кинетическую, поэтому окружность больше, чем при упругом ударе.

Проверка. Безразмерно: x — отношение энергий. Подстановка: при $y = \frac{n\cos\vartheta_m}{n+1} = \frac{4\cdot 0{,}707}{5} = 0{,}566$ получаем $\frac{p_2^2}{p_0^2} = 1 + 0{,}32 - 0{,}8 = 0{,}52$ и $y^2 + n\frac{p_2^2}{p_0^2} = 0{,}32 + 2{,}08 = 2{,}4 = 1 + x$ — энергия сходится. Предел $x \to 0$ даёт упругий удар с $\sin\vartheta_m = \frac{1}{n}$, верно.

Смысл: выделившаяся энергия в 1,4 раза больше начальной кинетической — именно столько нужно, чтобы тяжёлое ядро могло отклониться на 45°, а не только на 14,5°, как при упругом ударе.

Ответ. $x = \dfrac{n^2\sin^2\vartheta_m - 1}{n+1} = 1{,}4.$