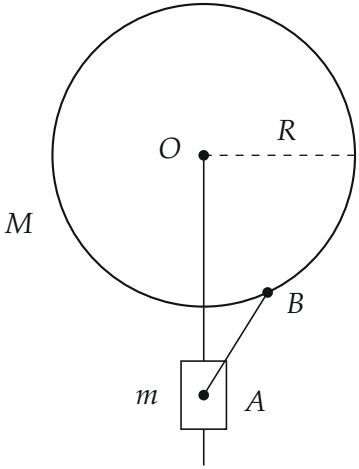
Обруч, стержень и груз на вертикальной направляющей

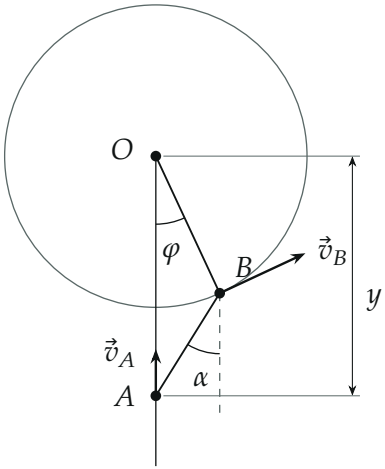
Задача 2. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 2] Груз массой $m = 10$ г может скользить по неподвижному вертикальному стержню. На верхнем конце стержня, в точке O, закреплена горизонтальная ось, вокруг которой может вращаться тонкий обруч с невесомыми спицами. Масса обруча $M = 90$ г равномерно распределена по его длине, радиус обруча $R = 20$ см. Обруч и груз соединены невесомым жёстким стержнем AB, который может свободно поворачиваться вокруг точек крепления A и B. Длина стержня $L = AB = 16$ см. В положении равновесия обруч расположен так, что стержень AB вертикален. Найдите период T колебаний системы, возникающих при малых отклонениях обруча от этого положения. Груз считайте материальной точкой, трение не учитывайте. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на малые колебания системы с одной степенью свободы: положение всех тел задаёт один угол поворота обруча φ. Удобнее всего энергетический способ: записать кинетическую и потенциальную энергию через φ и $\dot{\varphi}$ с точностью до квадратов малых величин и сравнить с грузом на пружине $\dfrac{m_э v^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$. Тонкое

место — скорость груза: при малом φ точка B движется почти горизонтально, стержень почти вертикален, и груз почти стоит.

Обозначения. φ — угол поворота обруча (угол OB с вертикалью), $\omega = \dot{\varphi}$; α — угол стержня AB с вертикалью; y — глубина груза под точкой O; $v_B = \omega R$ — скорость точки B, v_A — скорость груза (рисунок 2).



Обруч повёрнут на угол φ; скорость $\vec{v}_B$ перпендикулярна радиусу OB, скорость груза $\vec{v}_A$ направлена вдоль стержня-направляющей.

1. Связь углов. Горизонтальное смещение точки B от вертикали через O равно $R\sin\varphi$; то же расстояние даёт стержень AB: $L\sin\alpha$. Отсюда

$$L\sin\alpha = R\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{R}{L}\varphi.$$

2. Положение груза и потенциальная энергия. Глубина груза под O — сумма вертикальных проекций OB и BA:

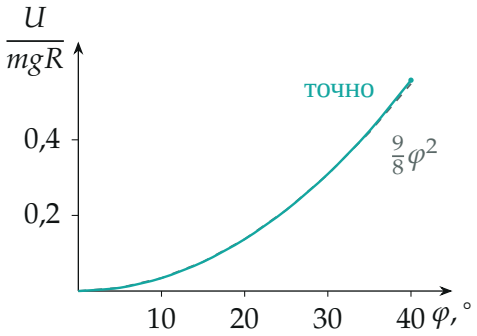
$$y = R\cos\varphi + L\cos\alpha.$$

В равновесии $y_0 = R + L$, при повороте груз поднимается на $y_0 - y = R(1-\cos\varphi) + L(1-\cos\alpha)$. Обруч закреплён в своём центре масс O, его потенциальная энергия не меняется. С точностью до φ^2 ($1-\cos\varphi \approx$

$\varphi^2/2$):

$$U = mg(y_0 - y) \approx mg\Big(\frac{R\varphi^2}{2} + \frac{L}{2}\cdot\frac{R^2\varphi^2}{L^2}\Big) = \frac{mgR}{2}\Big(1 + \frac{R}{L}\Big)\varphi^2.$$

Энергия растёт при любом знаке φ — равновесие устойчиво. Рисунок 3 сравнивает точную $U(\varphi)$ с этой параболой: до 25° они неразличимы.



Потенциальная энергия груза: точная (по формуле $y = R\cos\varphi + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2\varphi}$, бирюза) и приближение $\frac{1}{2}(1 + R/L)\varphi^2 = \frac{9}{8}\varphi^2$ (пунктир), посчитано по точкам.

3. Кинетическая энергия. Обруч тонкий, вся масса на расстоянии R от оси, спицы невесомы: момент инерции $I = MR^2$, энергия вращения $\dfrac{MR^2\omega^2}{2}$.

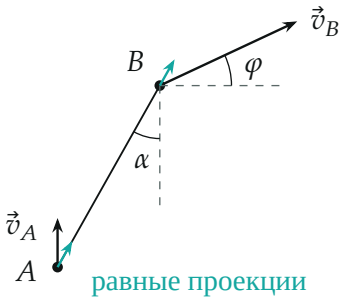
Скорость груза найдём из условия жёсткости стержня AB: проекции скоростей его концов на сам стержень равны (рисунок 4). Скорость $\vec{v}_B$ перпендикулярна OB, то есть составляет с горизонталью угол φ, а стержень составляет с вертикалью угол α. Угол между $\vec{v}_B$ и стержнем равен $90° - (\varphi + \alpha)$, угол между вертикальной $\vec{v}_A$ и стержнем равен α:

$$v_A\cos\alpha = v_B\sin(\varphi + \alpha) \quad\Rightarrow\quad v_A \approx \omega R\Big(1 + \frac{R}{L}\Big)\varphi.$$

Скорость груза — первого порядка по φ, его кинетическая энергия $\sim m\omega^2R^2\varphi^2$ — третьего-четвёртого порядка малости, её отбрасываем.

Остаётся

$$K = \frac{MR^2\omega^2}{2}.$$



Жёсткий стержень AB: проекции $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на его направление (бирюзовые стрелки) одинаковы.

4. Сравнение с пружинным маятником. Полная энергия сохраняется (трения нет):

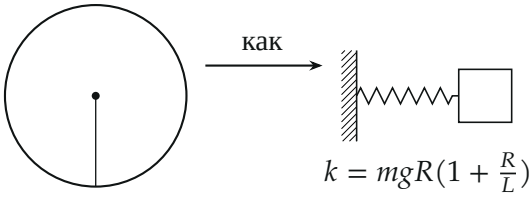
$$E = \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{mgR(1+\frac{R}{L})}{2}\varphi^2 = \text{const}.$$

Это энергия груза «массой» $m_э = MR^2$ на пружине «жёсткостью» $k = mgR(1+\frac{R}{L})$, координата — φ. Период такой системы $T = 2\pi\sqrt{m_э/k}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{mgR\,(1+R/L)}} = 2\pi\sqrt{\frac{MRL}{mg\,(R+L)}}.$$

Числа: $\dfrac{MRL}{mg(R+L)} = \dfrac{0{,}09\cdot 0{,}2\cdot 0{,}16}{0{,}01\cdot 10\cdot 0{,}36} = 0{,}08\ \text{с}^2$,

$$T = 2\pi\sqrt{0{,}08}\ \text{с} \approx 1{,}8\ \text{с}.$$



обруч: MR^2

Аналогия: инерцию даёт обруч, «пружину» — груз, который поднимается при повороте.

Обратите внимание. Хотя груз весит всего 10 г, именно он создаёт возвращающую силу, а инертность системы почти целиком у обруча. Подъём груза складывается из двух вкладов — поворота радиуса OB ($R\varphi^2/2$) и наклона стержня ($R^2\varphi^2/2L$); второй легко потерять.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{MRL}{mg(R+L)}} \approx 1{,}8$ с.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{с}^2$. Предел $L \to \infty$: стержень всегда вертикален, груз поднимается только за счёт OB, $T \to 2\pi\sqrt{MR/(mg)}$ — как у обруча с грузом m, висящим на нижней точке. Предел $m \to 0$: возвращающей силы нет, $T \to \infty$. Численно (рисунок 3) приближение $U \propto \varphi^2$ верно с точностью 1 % до $\varphi \approx 30°$.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{MRL}{mg(R+L)}} \approx 1{,}8$ с.