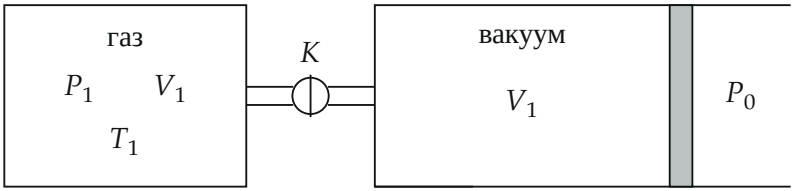
Расширение газа в цилиндр с поршнем

Задача 3. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 3] Сосуд постоянного объёма $V_1 = 2{,}5$ л соединён с длинным горизонтальным цилиндром короткой трубкой с краном K. Правый торец цилиндра открыт в окружающую среду, давление которой $P_0 = 10$ кПа постоянно. В цилиндре может свободно двигаться поршень площадью $S = 100$ см^2. В начальном состоянии 1 кран закрыт и в сосуде находится идеальный одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = 50$ кПа. При этом поршень закреплён и область цилиндра, лежащая слева от поршня, откачана до глубокого вакуума. Объём этой области также равен V_1. Кран открывают, и газ переходит в промежуточное равновесное состояние 2, заполняя объём $2V_1$ (поршень по-прежнему закреплён). После этого, оставив кран открытым, поршень отпускают и газ переходит в конечное равновесное состояние 3. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите:

1. температуру газа T_2 в промежуточном состоянии 2;
2. температуру газа T_3 в конечном состоянии 3;
3. расстояние x, на которое переместился поршень при переходе газа из состояния 2 в состояние 3.

Объём трубки с краном не учитывайте.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для необратимых процессов в теплоизолированной системе. Тепло не подводится, поэтому изменение внутренней энергии газа равно работе, совершённой над ним. На этапе $1 \to 2$ газ расширяется в пустоту и работы не совершает. На этапе $2 \to 3$ газ толкает поршень, а

снаружи на поршень давит атмосфера; поршень в начале и в конце покоится, поэтому вся работа газа равна работе против атмосферы. Процесс $2 \to 3$ не квазистатический: поршень разгоняется, колеблется, и равновесие наступает за счёт внутреннего трения в газе. Поэтому адиабату Пуассона применять нельзя — только закон сохранения энергии.

Обозначения. ν — количество газа; $U = \frac{3}{2}\nu RT$ — внутренняя энергия одноатомного газа; A — работа газа; V_3 — объём газа в цилиндре в состоянии 3 (весь газ занимает $V_1 + V_3$); x — смещение поршня (рисунок 2).

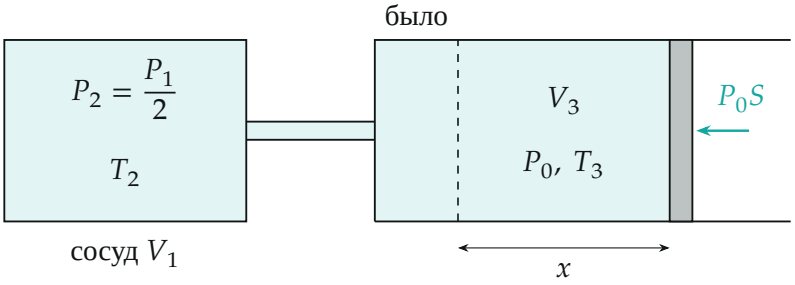
Пункт 1. Первое начало термодинамики для газа на этапе $1 \to 2$: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$. Стенки не проводят тепло, $Q_{12} = 0$; поршень закреплён, газ заполняет пустоту и ни на что не давит движущееся — $A_{12} = 0$. Значит,

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 = 300\ \text{К}.$$

Давление по закону Бойля — Мариотта (температура та же, объём вдвое больше):

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{2V_1} = \frac{P_1}{2} = 25\ \text{кПа} > P_0,$$

поэтому отпущенный поршень поедет вправо.



Состояние 3: поршень сдвинулся на x из положения «было», газ (бирюзовая заливка) занимает объём $V_1 + V_3$; на поршень снаружи давит атмосфера с силой $P_0 S$.

Пункт 2. 2.1. Работа газа. Теорема о кинетической энергии для поршня (масса любая, трения нет): в начале и в конце этапа поршень покоится, значит, сумма работ сил давления газа A_{23} и атмосферы равна нулю. Атмосфера давит постоянной силой P_0S навстречу смещению x:

$$A_{23} - P_0Sx = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{23} = P_0Sx = P_0(V_3 - V_1).$$

Работу газа считаем через внешнюю силу, а не как $\int P\,dV$: давление газа в ходе рывка неоднородно и не определено.

2.2. Конечное состояние. В равновесии поршень стоит, давление газа P_0. Уравнение Менделеева — Клапейрона для состояния 3 и для состояния 1:

$$P_0(V_1 + V_3) = \nu RT_3, \qquad P_1V_1 = \nu RT_1.$$

Отсюда $P_0V_3 = \nu RT_3 - P_0V_1$ и

$$A_{23} = \nu RT_3 - 2P_0V_1 = \nu RT_3 - \frac{2P_0}{P_1}\,\nu RT_1.$$

2.3. Первое начало термодинамики на этапе $2 \to 3$, $Q_{23} = 0$:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \nu RT_3 - \frac{2P_0}{P_1}\nu RT_1.$$

Сокращаем на νR:

$$\frac{5}{2}\,T_3 = T_1\Big(\frac{3}{2} + \frac{2P_0}{P_1}\Big) \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{T_1}{5}\Big(3 + \frac{4P_0}{P_1}\Big) = \frac{300}{5}\,(3{+}0{,}8) = 228\ \text{К}.$$

Газ остыл: он отдал энергию на работу против атмосферы.

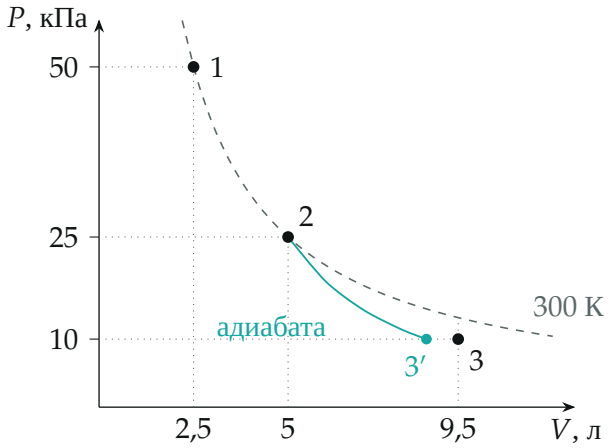
Пункт 3. Из 2.2 с $\nu R = P_1V_1/T_1$:

$$V_3 = \frac{\nu RT_3}{P_0} - V_1 = \frac{P_1V_1}{P_0}\cdot\frac{T_3}{T_1} - V_1 = \frac{V_1}{5}\Big(\frac{3P_1}{P_0} - 1\Big) = 7{,}0\ \text{л}.$$

Смещение поршня — приращение объёма цилиндра, делённое на пло-

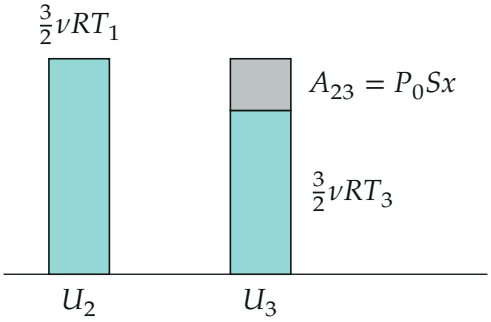
щадь:

$$x = \frac{V_3 - V_1}{S} = \frac{3V_1}{5S}\left(\frac{P_1}{P_0} - 2\right) = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3}{10^{-2}\ \text{м}^2} = 45\ \text{см}.$$



Равновесные состояния 1, 2, 3 (промежуточные состояния не равновесны — линий между точками нет). Пунктир — изотерма 300 K, на ней 1 и 2. Бирюза — квазистатическая адиабата из 2; она привела бы в 3′ с $T = 208$ K и меньшим объёмом.

Обратите внимание. Расширение 2 → 3 резкое, и формула $PV^{5/3} = \text{const}$ здесь неверна: она дала бы $T = T_1(P_0/P_2)^{2/5} = 208$ K и $x = 37$ см (точка 3′ на рисунке 3). При резком расширении газ теряет меньше энергии — часть работы, которую он совершил бы при медленном ходе поршня, превратилась обратно в тепло при затухании колебаний поршня.



Баланс энергии на этапе 2 → 3 в масштабе: внутренняя энергия газа (187,5 Дж) уходит на работу против атмосферы (45 Дж), остаётся 142,5 Дж.

Ответ: 1) $T_2 = T_1 = 300$ К; 2) $T_3 = \dfrac{T_1}{5}\left(3 + \dfrac{4P_0}{P_1}\right) = 228$ К; 3) $x = \dfrac{3V_1}{5S}\left(\dfrac{P_1}{P_0} - 2\right) = 45$ см.

Проверка. Баланс энергии числами: $\nu RT_1 = P_1V_1 = 125$ Дж, $U_2 = 187{,}5$ Дж, $U_3 = \frac{3}{2} \cdot 125 \cdot \frac{228}{300} = 142{,}5$ Дж, $A_{23} = P_0Sx = 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}45 = 45$ Дж — сходится. Предел $P_1 = 2P_0$: газ в состоянии 2 уже при давлении P_0, $x = 0$ и $T_3 = T_1$ — верно. Размерность x: $\text{м}^3/\text{м}^2 = \text{м}$.

Ответ. 1) $T_2 = 300$ К; 2) $T_3 = \dfrac{T_1}{5}\left(3 + \dfrac{4P_0}{P_1}\right) = 228$ К; 3) $x = \dfrac{3V_1}{5S}\left(\dfrac{P_1}{P_0} - 2\right) = 45$ см.